О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННО u_0-ВОГНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Дементьева А.М., Дементьев С.Н.[1]

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики,
Россия, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, тел.: (473) 2-715-362,
E-mail: alex_S_D1@mail.ru

[1]Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I,
кафедра высшей математики и теоретической механики,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1, тел.: (473) 2-537-371

Пусть E – вещественное банахово пространство, а u_0 – фиксированный ненулевой элемент из конуса K. Через E_{u_0} обозначим совокупность таких $x \in E$, для которых $-\gamma u_0 \le x \le \gamma u_0$ при некотором $\gamma > 0$. Для $x \in E_{u_0}$ введем u_0-норму:

$$\|x\|_{u_0} = \min \{\gamma : -\gamma u_0 \le x \le \gamma u_0\}.$$

Через $K(u_0)$ обозначим множество u_0-ограниченных элементов $x \in K$, для которых $\alpha(x)u_0 \le x \le \beta(x)u_0$, где $\alpha, \beta > 0$.

Нелинейный оператор $T : E \to E$ назовем обобщенно u_0-вогнутым, если для любого конусного отрезка $\langle x_0, y_0 \rangle \subset K,\ x_0 \ne \theta$ выполняется $T\langle x_0, y_0 \rangle \subset K(u_0)$, а для любых $x \in K(u_0)$ и $\tau \in (0,1)$ выполняется одно из включений

$$T\left\langle \tau x,\ \frac{1}{\tau}x \right\rangle \subset \left\langle (1+\eta(\tau,x))\tau Tx,\ \frac{1}{\tau}Tx \right\rangle;\quad T\left\langle \tau x,\ \frac{1}{\tau}x \right\rangle \subset \left\langle \tau Tx,\ \frac{1}{\tau(1+\eta'(\tau,x))}Tx \right\rangle,$$

где функции $\eta(\tau,x) > 0,\ \ \eta'(\tau,x) > 0$ непрерывны по τ и x.

Теорема. Пусть оператор T обобщенно u_0-вогнут и отображает любой конусный отрезок $\langle x, y \rangle$ из E в замкнутое в E множество, имеющее точные верхнюю и нижнюю грани, т.е. существуют элементы $\bar{y} = \sup T\langle x, y \rangle,\ \bar{x} = \inf T\langle x, y \rangle$. Пусть выполнено одно из следующих условий: 1) конус K – правильный; 2) оператор T отображает конусные отрезки из E в компактные в E множества. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) существует инвариантный относительно T конусный отрезок $\langle x, y \rangle,\ x \ne y$;

б) оператор T имеет единственную неподвижную точку x^*, к которой сходятся по u_0-норме итерации $T^n x$ для любого начального приближения $x \in K,\ x \ne \theta$.