

# НЕАВТОНОМНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Чуйко С.М., Старкова О.В.

Славянский государственный педагогический университет,  
Украина, 84116, г. Славянск, Г. Батюка, 19,  
Тел.: 38(06262)3-97-87, E-mail: *star-o@ukr.net*

Исследована задача о нахождении решений нетеровой ( $m \neq n$ ) краевой задачи

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (1)$$

при  $\varepsilon = 0$  обращающихся в решения  $z_0(t) \in C^1[a, b]$  порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad A(t), f(t) \in C[a, b], \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Функция  $Z(z, t, \varepsilon)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $z$  в малой окрестности решения порождающей задачи и по  $\varepsilon$  в окрестности нуля, а также непрерывная по  $t$ ;  $\ell z(\cdot, \varepsilon)$  — линейный и  $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  — нелинейный векторный функционалы. Функционал  $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  дважды непрерывно дифференцируем по неизвестной  $z$  и по  $\varepsilon$  в окрестности решения порождающей задачи и на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ .

**Лемма.** Если в критическом случае ( $P_{Q^*} \neq 0$ ) задача (1) имеет решение  $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], C[0, \varepsilon_0]$ , при  $\varepsilon = 0$  обращающееся в порождающее  $z_0(t, c_r^*)$ , то вектор  $c_r^*$  удовлетворяет уравнение [1]

$$F_0(c_r) = P_{Q^*} \{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $X(t)$  — нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2);  $Q = \ell X(\cdot)$ ,  $\text{rank} Q = n - r$ ,  $P_{Q^*}$  — ортопроектор:  $\mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$ ,  $K[f(s)](t)$  — оператор Грина [1] задачи Коши.

Нами получены достаточные условия существования по меньшей мере одного решения задачи (1) в случае наличия кратных корней уравнения (3), обобщающие соответствующие результаты [2]; при этом существенно использованы вторые дифференциалы нелинейностей  $Z(z, t, \varepsilon)$  и  $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ . Для построения решения задачи (1) предложена итерационная схема; в качестве примера построены приближения к решению  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения Матье [1-3].

## Литература

Чуйко С.М., Бойчук И.А. Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелинейные колебания. — 2010. — Т. 13. — № 1. — С. 115–132.

Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — Т. 40, № 1. — С. 62–69.

Boychuk I., Starkova O., Tchujko S. Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Zilina. Mathematical Series. — October, 2009. — V. 23, No. 1. — P. 1–8.