

НЬЮТОНОВСКИЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРЫ

Хакимова А.Б., Рзун И.Г.

ФГОУ ВПО «Морская государственная академия им. адмирала Ф.Ф. Ушакова»,
факультет эксплуатации вычислительной техники и судовождения, каф. Системного
анализа, управления и обработки информации.

Россия, 353918, г. Новороссийск, пр. Ленина 93.

Тел.: 8(8617)680166.

E-mail: puma_home@mail.ru

Уравнение $x^T H x = 1$ является ключевым для понимания геометрической интерпретации свойства положительной определённости. Вектор x , удовлетворяющий этому уравнению, лежит на поверхности n - мерного эллипсоида с центром в начале координат. Пусть λ_i - собственное значение матрицы H , тогда направление осей эллипсоида совпадают с направлением соответствующих собственных векторов, а половина длины i - ой оси равна $1/\sqrt{\lambda_i}$. Таким образом, геометрия положительной определённости полностью связана с собственными числами и векторами матрицы H . Приводится описание операций, выполняемых для определения собственных чисел и векторов матрицы H . Дана наиболее эффективная схема организации расчетов. Шаг 1. Построить треугольное разложение матрицы $H = U^T D U$, например, с помощью техники исключения Гаусса в прямом порядке. Шаг 2. Заменить переменные $y = U x$, Шаг 3. Перейти от (2) к уравнению $x = \bar{U} y$, например, с помощью техники исключения Гаусса в обратном порядке. Шаг 4. Сформулировать задачу математического программирования: найти экстремум функции $F(x) = x^T x = y^T \bar{U}^T \bar{U} y$ при ограничении $y^T D y = 1$ для определения собственного числа и вектора матрицы H . Пусть x^* - экстремум функции $F(x)$, тогда x^* - собственный вектор, а уравнение $(x^*)^T x^* = 1/\lambda^*$ определяет связь с собственным числом матрицы H . Если $n > 1$, определено $y_1 = 1/\sqrt{d_{11}} \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_{n-1}$, $y_2 = 1/\sqrt{d_{22}} \cos \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \dots \sin \alpha_{n-1}, i = 2, \dots, n-1$, $y_n = 1/\sqrt{d_{nn}} \cos \alpha_n$. Полученные по этим формулам y_i удовлетворяют нелинейному ограничению автоматически при любых α_i , т.е., позволяют применить ньютоновские методы безусловной оптимизации для определения собственного числа и вектора матрицы H . Остальные векторы можно получить, применяя методы ортогонализации.

Литература.

1. Хакимова А.Б., Зеленков Г.А., Рзун И.Г. Подход к увеличению эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода. // Труды ИСА РАН Динамика неоднородных систем. Том 53(2), 2010 г. Стр. 245-251.