НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ Г.ВЕЙЛЯ В КОЛЬЦЕ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Сорокин П.Н.

НИИ Системных Исследований РАН,
Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр-т, д. 36, к. 1,
Тел.: (495)4874803, E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Пусть $Z[i] = \{z \in C : z = x + iy,\, x, y \in Z\}$ – кольцо гауссовых чисел. $Nz = |z|^2$ – мультипликативная норма в этом кольце. Рассмотрим тригонометрическую сумму Г.Вейля [1] следующего вида:

$$S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \sum_{N\lambda < P} e^{\pi i Sp\,(f(\lambda))}, \tag{1}$$

$f(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \ldots + \alpha_1 \lambda,\, \alpha_n, \ldots, \alpha_1 \in C,\, \lambda \in Z[i],\; n, P \in N,\; P > 1,\; Sp(\tau) = 2\,\mathrm{Re}(\tau), \forall\, \tau \in C.$
Будем считать, что точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) \in \prod_n = ([0,1] \times [0,i])^n \subset C^n$. Разобьем точки Π_n на два класса E_1 и E_2. Точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = (x_n + i\,y_n, \ldots, x_1 + i\,y_1) \in E_1$, если

$$x_s = \frac{a_s(x)}{b_s(x)} + \delta_s(x),\; a_s(x), b_s(x) \in Z,\; \text{НОД}\,(a_s(x), b_s(x)) = 1,\; 0 \le |a_s(x)| < |b_s(x)|, \tag{2}$$

$$y_s = \frac{a_s(y)}{b_s(y)} + \delta_s(y),\; a_s(y), b_s(y) \in Z,\; \text{НОД}\,(a_s(y), b_s(y)) = 1,\; 0 \le |a_s(y)| < |b_s(y)|, \tag{3}$$

$$|\delta_s(x)| < (\sqrt{P})^{-s+\frac{1}{n}},\; |\delta_s(y)| < (\sqrt{P})^{-s+\frac{1}{n}} = 1,\; s = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$Q(x) = HOK\;(b_1(x), \ldots, b_n(x)),\quad |Q(x)| < (\sqrt{P})^{1/n}, \tag{5}$$

$$Q(y) = HOK\;(b_1(y), \ldots, b_n(y)),\quad |Q(y)| < (\sqrt{P})^{1/n}. \tag{6}$$

Все остальные точки Π_n принадлежат второму классу E_2.

Теорема. Пусть $n > 11$ и $0 < \varepsilon < 1$ – произвольное малое число. Тогда для модуля суммы (1), где коэффициенты многочлена, стоящего в экспоненте, являются точками первого (условия (2) – (6)) и второго класса, имеют место следующие оценки:

$$|S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|_{E_1} << P \cdot (Q(x) \cdot Q(y))^{-\frac{1}{n}+\varepsilon} \text{ или}$$

$$|S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|_{E_1} << P \cdot (Q(x) \cdot Q(y))^{-\frac{1}{n}+\varepsilon} \cdot \gamma_1^{-\frac{1}{m}} \cdot \gamma_2^{-\frac{1}{m}}, \text{ если } \gamma_1 \ge 1, \gamma_2 \ge 1,$$

где $\gamma_1 = \max(|\delta_n(x)| \cdot P^{2/n}, \ldots, |\delta_n(x)| \cdot P^2)$, $\gamma_2 = \max(|\delta_n(y)| \cdot P^{2/n}, \ldots, |\delta_n(y)| \cdot P^2)$.

$$|S(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)|_{E_2} << P^{1-\rho}, \text{ где } \rho^{-1} = 8n^2(\ln n + 0{,}5 \ln\ln n + 1{,}3).$$

Обозначение $A << B$ показывает, что $|A| < c\,B$, для некоторой константы $c > 0, B > 0$.

Литература

1. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – Наука, 1971.