СИММЕТРИЯ КАК СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ КОМПОНЕНТ ПРОЦЕССА ВОСПИТАНИЯ ЭСТЕТИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ ЛИЧНОСТИ ШКОЛЬНИКА

Аксютина И. В.

(Россия, Астрахань)

В наше время важными становятся вопросы, связанные с воспитанием творческой личности школьника в процессе обучения. Особая роль здесь отводится работе по формированию эстетической воспитанности учащихся. Нами разработаны для старшеклассников содержание и методика проведения занятий, которые способствуют посредством использования идеи симметрии успешному развитию эстетического потенциала учащихся, воспитанию их эстетических вкусов и предпочтений.

Обучение математике в школе призвано развивать познавательные и творческие способности каждого ребенка, его интеллект, культуру и должно быть направлено на развитие личности школьника. Математика вооружает учащихся конкретными математическими знаниями, необходимыми в практической деятельности, а также при изучении смежных дисциплин. Изучение математики способствует становлению гуманитарной культуры человека, раскрывает представление о том, что математика – часть общечеловеческой культуры.

В связи с этим одной из основных целей обучения математике является привитие учащимся интереса к этому предмету посредством использования особенностей самой математики. Особая роль здесь отводится работе по формированию эстетической воспитанности учащихся, при этом она должна охватывать все компоненты процесса обучения математике, т. е. формирование математических понятий, изучение теорем, решение задач.

Раскрывая содержание эстетического потенциала математики, можно выделить один из аспектов, под которым следует понимать математический аппарат, являющийся необходимым инструментом познания законов гармонии объективного мира. В данном случае речь идет о формальной красоте (красота, постигаемая чувствами, радующая глаз). Основу этого математического аппарата составляют учения о симметрии и таких ее частных проявлениях, как пропорция «золотое сечение», периодичность или центральное проектирование, которое в теории живописи рассматривается как учение о перспективе.

Первоначально геометрическая симметрия (от греческого symmetria – соразмерность) зародилась как понятие о гармонии пропорций. С течением времени она приобрела универсальный характер и была осознана как всеобщая идея инвариантности (т. е. неизменности) относительно некоторых преобразований. Таким образом, геометрический объект считается симметричным, если с ним можно сделать что-то такое, после чего он останется неизменным. Например, пятиконечная звезда, если её повернуть на 72^0 (или другой, кратный 72^0, угол), займет первоначальное положение. Этот пример можно привести при изучении на уроке видов симметрии, сформулировав его в виде вопроса (в данном случае речь идет о поворотной симметрии): «На какой угол надо повернуть пятиконечную звезду, чтобы она заняла первоначальное положение?». При ответе на такие вопросы ребята имеют возможность рассуждать логически, находить закономерность, получать начальные сведения о симметрии и увидеть, как она связана с нашими понятиями о красоте.

В современном понимании симметрия – это общенаучная философская категория, характеризующая структуру организации систем. Важнейшим свойством симметрии является сохранение (инвариантность) тех или иных признаков (геометрических, физических, биологических и т. д.) по отношению к вполне определенным преобразованиям. Математическим аппаратом изучения симметрии сегодня является теория групп и теория инвариантов.

Перейдем к эстетическому содержанию симметрии. С детства человек видит зеркальную симметрию в листьях, цветах, телах животных и людей, поворотную симметрию в стройных елях и волшебных узорах снежинок, переносную симметрию в оградах парков, решетках мостов, трансляционную симметрию в рисунках на обоях, кружевах, узоре на шкуре змей, цветную симметрию в шахматных фигурах, расставленных в одинаковом порядке.

Таким образом, симметрия воспринимается человеком как проявление закономерности, порядка, царящего в природе. Восприятие же закономерного всегда доставляет нам удовольствие, вселяет даже некоторую уверенность. «Порядок освобождает мысль», – любил повторять великий французский математик, философ Рене Декарт.

Симметрия воспринимается слишком статично, скованно, и только единство симметрии и асимметрии создает подлинную гармонию красоты. В качестве меры соотношения симметричного и асимметричного часто выступает пропорция.

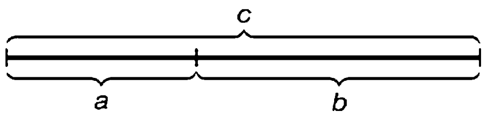
Слово «пропорция» было введено в употребление Цицероном в I веке до н. э., он перевел на латынь платоновский термин «аналогия», который буквально означал «вновь – отношение» (в современной трактовке «соотношение»). С тех пор пропорцией в математике называют равенство между отношениями четырех величин a, b, c, d: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

В эстетике пропорция, как и симметрия, является составным элементом категории меры и выражает закономерность структуры эстетического образа.

Учителю надо стремиться к тому, чтобы дети осознали и приняли эти кажущиеся простыми и очевидными идеи. Такой подход означает шаг на пути эстетического воспитания учащихся.

Практическое знакомство с «золотым сечением» можно начать в 7-м классе, при изучении темы «Что такое задачи на построение» [7, с. 58–60]. Рассмотрим задачу 5.4 «Деление отрезка пополам». После приведенного решения учителем делается замечание о том, что если отрезок разделить пополам, зеркальносимметрично, то такое деление выглядит уравновешенным, мертвым, и предлагает ученикам разделить отрезок «более красиво». После обсуждения с учащимися разных вариантов деления отрезка приходим к выводу, что если точку деления взять слишком близко к одному из концов отрезка, то новая конфигурация будет чересчур неуравновешенной и беспокойной. Только некоторая «золотая середина», которая в данном случае отнюдь не является геометрической серединой, обеспечит нам желаемое единство симметрии и асимметрии.

Такое «радующее глаз» деление отрезка было известно еще Пифагору и называлось им «золотой пропорцией». Золотая пропорция определяется как деление отрезка на две неравные части, при котором меньшая из них так относится к большей, как последняя – ко всей длине отрезка.



$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

Рис. 1. Геометрическое изображение золотой пропорции

С тех пор золотая пропорция становится общепризнанным каноном искусства. Художник и инженер Леонардо да Винчи, изучавший и восхвалявший «золотую пропорцию» на протяжении всей своей жизни, называет ее «Sectio aurea» (золотое сечение), а математик и астроном Иоганн Кеплер (XVI в.) назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обратил внимание на значение золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение, в частности, придорожная трава – цикорий, подчиняются золотому сечению). Кеплер называл золотую пропорцию продолжающей саму себя. «Устроена она так, – писал он, – что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности».

Решив задачу 5.4 «Деление отрезка пополам» и задачу 5.5 «Построение перпендикулярной прямой» (7 класс), можно рассказать учащимся о делении отрезка прямой в данном отношении (в отношении золотого сечения) с помощью циркуля и линейки, т.е. о том, как найти на отрезке точку, делящую этот отрезок в отношении золотого сечения. Т.к. в этой задаче используется еще не изученная школьниками теорема Пифагора, её решение приводится без доказательства.

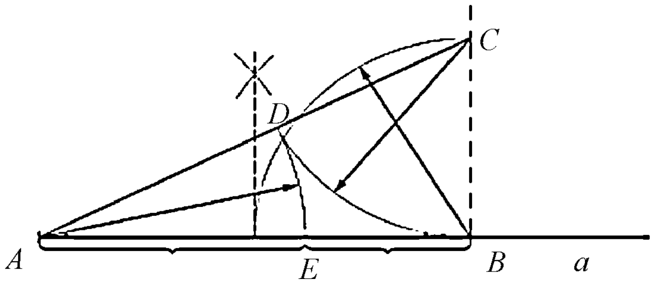


Рис. 2. Деление отрезка прямой по золотому сечению

На прямой a возьмем отрезок $\mathrm{AB}=1$. Используя ранее решаемые задачи «Построение перпендикулярной прямой» и «Деление отрезка пополам», восстановим из точки B перпендикуляр и возьмем на нем точку C, для которой $\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2\mathrm{AB}}$, т.е. $\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$. Полученную точку C соединим прямой с точкой A. Проведем окружность с центром в точке C и радиусом, равным CB, до пересечения с прямой AC и получим точку D, причем $\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Проведем окружность с центром в точке A и радиусом, равным AD, до пересечения с прямой AB, вследствие чего получим точку E. $\mathrm{AD}=\mathrm{AE}$, следовательно, точка E делит отрезок AB в соотношении золотой пропорции.

Проведя построение, следует обратить внимание учащихся на тот факт, что отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной дробью. Если AB принять за единицу, то AE=0,618..., BE = 0,382.... Также учащимся предлагается проверить, что $\frac{BE}{EA} = \frac{EA}{AB}$ – «золотая пропорция». Такая эвристика запомнится надолго.

В 8-м классе, при изучении теоремы Пифагора, к этой задаче рекомендуется вернуться.

Многие научные открытия показали, что золотое сечение составляет основу многих природных явлений, что оно связано с глубокими естественно-научными закономерностями. В подтверждение этого высказывания, на заключительном этапе урока по теме «Осевая и центральная симметрия» в 8-м классе можно предложить ученикам следующие задачи-вопросы:

1. Какая линия разделяет тело человека в отношении «золотой пропорции»?
2. Найти золотые пропорции в частях тела человека (голова, кисть и пальцы и т.д.).
3. У кого из пресмыкающихся длина хвоста так относится к длине остального тела, как 62 к 38?
4. Как связано куриное яйцо с «золотой пропорцией»?

А в качестве дополнительного домашнего задания школьникам предлагается произвести соответствующие измерения.

Такие задачи-вопросы являются прекрасным материалом для вовлечения обучающихся в интересную, содержательную и поучительную деятельность. В данном случае занимательность имеет не внешний, формальный характер, а побуждает учеников выяснить суть изучаемого материала.

Таким образом, являясь законом природы, золотое сечение становится и мерой человеческого творчества, «законом красоты». Следовательно, раскрывается еще одна эстетическая грань золотого сечения – целесообразность, так как в целесообразности природы сомнений у человечества никогда не было.

Существует множество познавательной информации из области искусства, науки, из практической сферы, способной удивить учащихся, показать им целесообразность математики как одну из составляющих ее эстетики. Рассматриваемый элемент присущ прикладным задачам межпредметного и практического характера. Конечно, в первую очередь, здесь речь идет о задачах, в содержании которых раскрывается связь математики с живописью, архитектурой, музыкой, литературой на базе таких понятий, как симметрия, пропорция, перспектива, «золотое сечение», логарифмы и др.

Примером заданной ситуации, отражающей выше изложенный аспект, может служить следующая задача, рассмотренная при изучении темы «Тригонометрические функции двойного и тройного аргумента» (10 кл.):

<u>Задача.</u> Если диагонали правильного пятиугольника продолжить до взаимного пересечения, то получится правильный звездчатый пятиугольник, называемый пентаграммой, являвшийся в свое время эмблемой школы Пифагора. Докажите, что все диагонали такого пятиугольника делят друг друга на отрезки, связанные между собой золотой пропорцией.

Рассмотрим правильный пятиугольник. Его диагонали образуют правильный звездчатый пятиугольник (пентаграмму). Перед тем как приступить к поиску решения данной задачи учащимся предлагается вспомнить, чему равны углы в правильном многоугольнике и чему равна сумма углов треугольника.

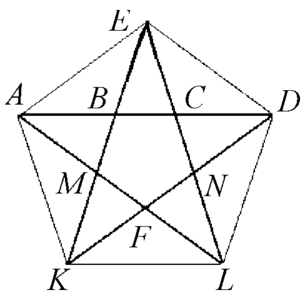


Рис. 3. Пентаграмма

При рассмотрении ΔADF используем эти знания для нахождения углов в этом треугольнике (т. к. MBCNF – правильный пятиугольник, то $\angle AFD = 108^0$, $\angle ADF = \angle FAD = 36^0$). Применив теорему синусов и, использовав формулы приведения, выученные на прошлом уроке, докажем, что $\frac{AD}{AF} = 2\cos 36^0$.

Необходимо обратить внимание учеников на правую часть равенства, т.е. используя наводящие вопросы, натолкнуть их на вывод о том, что в правой части равенства стоит выученная на этом уроке формула $\cos 2\alpha$ ($\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0$).

Самостоятельно школьникам предлагается разложить $\sin 72^0$ через $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ и доказать, используя формулы приведения, выученные на прошлом уроке, что $\sin 72^0 = \cos 18^0$:

$$\sin 72^0 = 2\sin 36^0 \cos 36^0 = 4\sin 18^0 \cos 18^0 (1 - 2\sin^2 18^0).$$

$\sin 72^0 = \cos 18^0$ (не равно 0),

$$1 = 4\sin 18^0 (1 - 2\sin^2 18^0).$$

Значит, $\sin 18^0$ можно считать одним из корней уравнения $1 = 4x\left(1 - 2x^2\right)$ или $8x^3 - 4x + 1 = 0$. Разложим левую часть на множители: $(2x-1)\left(4x^2 + 2x - 1\right) = 0$.

Корни этого уравнения: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}, x_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

А так как $\sin 18^0$ есть положительное число, то $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Обозначим эту дробь как $\frac{1}{2\alpha}$. Тогда, использовав вышеприведенные выкладки, школьникам предлагается самостоятельно доказать, что

$$\cos 36^0 = \frac{\alpha}{2} \left(\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - \frac{2}{4\alpha^2} = \frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, $\frac{AD}{AF}=\alpha$. Но $AF = AC$, значит, $\frac{AD}{AF}=\frac{AD}{AC}=\alpha$ и точка C делит отрезок AD в отношении золотого сечения.

Одним из важных аспектов при обучении математике является процесс формирования математических понятий. Развитию эстетической воспитанности для формирования понятий будут способствовать задачи, обладающие красивым решением.

Нахождение эстетически привлекательного решения уже известной задачи может служить мотивацией введения некоторых понятий, к которым, например, следует отнести понятия, лежащие в основе таких мощных методов решения задач, как метод геометрических преобразований, метод площадей, координатный и векторный методы.

Задача. На сторонах $\angle XOY$ отмечены точки A, B, C, D так, что $OA = OB, AC = BD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE – биссектриса $\angle XOY$. Используя эту задачу, опишите способ построения биссектрисы угла [6, с. 50].

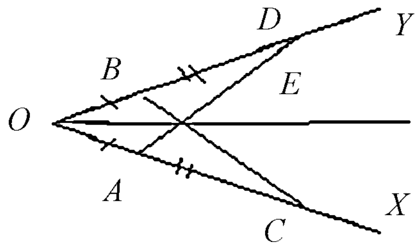


Рис. 4. Чертеж к задаче

Впервые данная задача встречается в учебнике «Геометрия 7–9» под редакцией Л. С. Атанасяна в разделе дополнительных задач главы "Треугольники". При решении данной задачи учащиеся седьмого класса, в соответствии с уровнем своих знаний на данном этапе обучения могут использовать только изученные свойства треугольников, поэтому доказательство получается достаточно громоздким, а значит, не удовлетворяющим критериям эстетической привлекательности.

I способ.

1) т.к. $OA = OB$, то ΔOBA – равнобедренный, следовательно, углы, прилежащие к его основанию, равны $\angle OBA = OAB$;

2) $\Delta ODA = \Delta OCB$ по I признаку равенства треугольников ($OD = OC, OA = OB$, $\angle DOC$ - общий), значит, $\angle DAO = \angle OBC$;

3) если $\angle BAE = \angle DAO - \angle BAO$, $\angle ABE = \angle$ $OBC - \angle OBA$, то $\angle BAE = \angle ABE$, следовательно ΔABE – равнобедренный;

4) $\Delta OBE = \Delta OAE$ по III признаку равенства треугольников (OB = OA, BE = EA, OE – общая);

5) из равенства этих треугольников следует, что $\angle BOE = \angle EOA$, значит, OE – биссектриса.

Перед изучением в 8-м классе темы «Симметрия относительно прямой» учащимся предлагается вышеприведенная задача в качестве домашнего задания. При обсуждении решения данной задачи в классе целесообразно указать на его недостатки с точки зрения эстетической привлекательности. При этом обратим внимание на то, что при перегибании $\angle XOY$ по биссектрисе, точка B совпадет с точкой A, точка C, с точкой D, причем это свойство поможет нам найти более красивое решение данной задачи, но для начала необходимо вспомнить введенное ранее (6 кл.) понятие симметрии, ввести понятие симметрии относительно прямой и рассмотреть его свойства.

II способ.

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы $\angle XOY$ и докажем, что точка E принадлежит этой биссектрисе. При симметрии относительно биссектрисы $\angle XOY$ точка A оказывается симметричной точке B, точка D – точке C, отрезок AD симметричен отрезку BC (при наложении совпадают). Таким образом, общая точка E этих отрезков окажется симметричной самой себе, а таким свойством обладают только точки, принадлежащие оси симметрии, т.е. биссектрисе. Значит, точка E принадлежит биссектрисе $\angle XOY$.

На протяжении веков пути математики и различных видов искусства нередко переплетаются. Для развития эстетического вкуса у школьников широкие возможности предоставляет изучение истории симметрии, золотого сечения в математике, живописи, скульптуре, архитектуре в живой природе.

Такой экскурс в историю можно сделать на занятии – семинаре (в 8-м классе, использовав один урок, выделенный программой для повторения), предварительно предложив школьникам подготовить доклады о примерах симметрии, в частности «золотого сечения» в живописи, архитектуре, природе и т.д.

Однако ученикам рекомендуется при своем выступлении вести диалог с классом, т.е. задавать вопросы, не требующие от слушателей глубоких познаний в соответствующей области, но и не слишком элементарные.

Подготовка школьников к таким занятиям - семинарам требует от них мобилизации разносторонних знаний и качеств, предполагает обращение к различным изолированным друг от друга источникам, развивает способность анализировать, воспитывает устойчивое внимание, волю, настойчивость в преодолении трудностей, учит целесообразно использовать информацию, формирует самостоятельность и положительное отношение к труду. На занятиях-семинарах создаются условия, побуждающие школьников к активной деятельности. Все ученики готовят доклады, выступают с ними на занятиях-семинарах. В ходе обсуждения докладов учащиеся выявляют, какие вопросы докладчик не раскрыл, и, по возможности, дополняют его выступление. Докладчик делает краткие выводы по обсуждаемому вопросу.

Такая методика проведения занятий-семинаров позволяет воспитывать у школьников интерес к изучению математики, стремление к творчеству, развивает речь, формирует у них свой индивидуальный стиль деятельности, позволяет осуществлять эстетическое развитие школьников.

В данной работе приведены лишь некоторые примеры, подтверждающие многие теоретические положения об эстетическом потенциале уроков математики. Посредством использования на занятиях различных способов подачи математического материала реализуется стремление учителя повысить его привлекательность. В результате такого обучения ученики начинают смотреть на задачи как на исследовательские объекты, в которых скрыта гармония и красота математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение // Квант. 1973. № 8.
2. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. №2. С. 40-43.
3. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: 1990. – 298 с.
4. Вейль Г. Симметрия. – М.: 1968. – 286 с.
5. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – М.: Мир, 1971.
6. Геометрия: Учеб. для 7-9кл. общеобразоват. учреждений // Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1997. – 335 с.
7. Геометрия: Учеб. для 7–9кл. общеобразоват. учреждений // А. В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2005. – 224 с.
8. Готт В. С. Симметрия и асимметрия. – М.: 1965. – 23 с.

SYMMETRY AS A SUBSTANTIAL COMPONENT OF PROCESS EDUCATION OF AESTHETIC ASPECTS OF THE SCHOOLBOY

Aksyutina I. V.
(Russia, Astrakhan)

Presently important there are the questions connected to education of the creative person during training. Special work should be carried out for formation of aesthetic education of pupils. For senior pupils we develop contents and new methods of passage out occupations which help to develop more successfully at use of idea of symmetry aesthetic potential of pupils, to bring up their aesthetic tastes and preferences.