ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ УМЕНИЮ РАССУЖДАТЬ ПО АНАЛОГИИ КАК ОДНОЙ ИЗ БАЗОВЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ РАЗВИТИЯ ИНТУИЦИИ

Шуклина Ю. А.

(Россия, Астрахань)

Одним из мест, где используется интуиция, являются умозаключения по аналогии. Применение аналогии создает возможность для более естественного усвоения школьниками учебного материала. Нами разработаны содержание и методика развития некоторых видов интуиции посредством решения математических задач с применением аналогии.

Одним из эффективных приемов, способных пробудить у учащихся живой интерес к предмету в процессе обучения математике, является широкое применение аналогии. Применение аналогии помогает приобщить школьников к исследовательскому виду деятельности. Выводы по аналогии бывают только вероятные, но такие предположения несут в себе нечто новое. Аналогия важна тем, что она наводит на догадки, помогает учащимся находить предположительное решение новых вопросов, учебных проблем и этим способствует развитию математической интуиции.

А. Пуанкаре ввел особый вид интуиции – «интуиции чистого числа» [4]. Она помогает увидеть скрытые аналогии, что в математике играет зачастую решающую роль. Такая интуиция позволяет не выходить за рамки логического знания, поэтому избавляет ее обладателя от логических ошибок. По мнению А. Пуанкаре, это единственная интуиция, которая нас не обманет, а даст начало настоящему математическому умозаключению. Поэтому, с целью развития интуиции, в процессе обучения математике учителю следует не только самому пользоваться аналогиями, но и приобщать учащихся к самостоятельному проведению умозаключений по аналогии.

При этом необходимо объяснить учащимся, что выводы, полученные по аналогии, требуют обязательного обоснования, так как они могут оказаться ошибочными. Однако следует помнить, что применение аналогии дает возможность для более естественного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному.

Аналогия может быть использована в нескольких аспектах: 1) между элементами одного или двух числовых множеств; 2) между различными элементами плоских фигур; 3) между некоторыми плоскими и пространственными фигурами и др.

В данной работе мы остановимся на первых двух направлениях. Кроме того, затронем способы обучения школьников построению утверждений по аналогии, что является базовой составляющей развития интуиции.

При решении различных задач учащимся иногда необходимо умение составлять предложение, аналогичное данному. Формировать такое умение можно, например, при изучении в 6 классе темы «Признаки делимости». Рассмотрев с учащимися, допустим, признак делимости на 3, следует предложить им самим сформулировать признак делимости на 9. После того как учащийся сформулирует необходимый признак, надо провести сравнение предложений. Важно при этом подчеркнуть, что если данное высказывание истинно, то не обязательно окажется истинным высказывание, полученное из данного по аналогии. В приведенном примере учащиеся убеждаются в справедливости утверждения о делимости числа на 9, сформулированного по аналогии с признаком делимости числа на 3.

Однако это не всегда так, и надо предоставить учащимся возможность самим в этом убедиться, организовав соответствующим образом их познавательную деятельность. Приведем пример. Целесообразно познакомить учащихся с методом доказательства, заключающимся в том, что для установления ложности какого-либо утверждения достаточно привести хотя бы один пример, опровергающий это утверждение. Например, истинным является высказывание: «На 4 делятся те числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4». А высказывание: «На 8 делятся те числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8», буквально аналогичное данному, является ложным. Учащиеся, используя вышеназванный метод доказательства, в качестве объектов, опровергающих утверждение, сформулированное по законам буквальной аналогии, приводят, например, числа 100 и 164. Таким образом, учитель предостерегает учащихся от голой, буквальной аналогии и приучает их не считать сразу верными сформулированные по аналогии утверждения, а убеждаться в их справедливости. Сформулировать же аналогичный признак поможет наблюдение, сформированное у учащихся умение видеть – основа для аналогии. Учащихся следует натолкнуть на мысль, что если буквальная аналогия не является справедливой, то, возможно, справедливым окажется утверждение с внесенными в него некоторыми изменениями. В приведенном случае важно заметить, что 4 можно представить в виде произведения *двух* одинаковых множителей $(4 = 2 \cdot 2)$, а 8 – в виде произведения *трех* одинаковых множителей $(8 = 2 \cdot 2 \cdot 2)$. Установив такое различие, учащиеся, естественно, наводятся на мысль, что в утверждении о делимости чисел на 4 рассматриваются числа, у которых количество последних цифр (нулей) равно числу простых множителей в разложении числа 4. Это наблюдение поможет сформулировать утверждение о делимости чисел на 8: «На 8 делятся те числа, у которых *три* последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8», в истинности которого они убеждаются, проведя доказательство по аналогии с доказательством для числа 4.

При изучении темы «Сложение десятичных дробей» в 5 классе метод аналогии можно использовать для того, чтобы подвести учащихся к формулировке правила сложения десятичных дробей. При введении десятичных дробей важно добиться у учащихся четкого представления о десятичных разрядах рассматриваемых чисел. Полезно предварительно вспомнить сложение натуральных чисел, а затем сложение натуральных чисел и сложение десятичных дробей рассмотреть параллельно. Наблюдения учащихся целесообразно представить в виде таблицы (см. табл. 1). Содержание этой таблицы необходимо предложить учащимся проанализировать и сформулировать выводы.

В этом случае учащиеся самостоятельно формулируют и правило сложения десятичных дробей.

Таблица 1. Сложение натуральных чисел и десятичных дробей

<table>
<tr><td>Натуральные числа
125+368</td><td>Десятичные дроби
25,45+102,2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Подписываем слагаемые одно под другим так, чтобы одинаковые разряды слагаемых находились друг под другом.</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>+</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>9</td><td>3</td></tr>
</table></td><td><table>
<tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td>2,</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>+</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td>5,</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>7,</td><td>6</td><td>5</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Так как число 102,2 не имеет сотых долей, то вместо сотых ставим 0.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Выполняем сложение поразрядно, начиная с единиц низшего разряда.</td></tr>
</table>

Таким образом, использование метода аналогии способствует организации поисковой деятельности учащихся, активизирует их мыслительные способности, развивает интуицию и элементы творческости (например, перенос способов познания из одной ситуации в другую, выделение существенных свойств объектов и отвлечение от несущественных, мешающих установлению закономерности, видение объекта с разных сторон и др.).

Богатым материалом для развития интуиции на основе обучения учащихся умению рассуждать по аналогии располагает геометрия. Развитие интуиции распадается на ряд этапов. В начале изучения курса геометрии, начиная с 7 класса, основное внимание следует уделить выделению в каком-то смысле аналогичных элементов из аналогичных задач и теорем. Например, рассмотрим две пары задач.

1.1. Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны.	1.2. Докажите, что у равнобедренного треугольника медианы, проведенные из вершин при основании, равны.
2.1. Докажите равенство треугольника по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины.	2.2. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

Для *биссектрисы* в задаче 1.1 своеобразным аналогичным элементом в задаче 1.2 является *медиана*. В задачах второй пары такими элементами оказались: *две стороны, исходящие из одной вершины* (2.1), и *два угла, на которые медиана разбивает угол треугольника* (2.2). Указанные задачи необходимо решить непосредственно друг за другом, оформляя решение «параллельно», т.е. с левой стороны одно решение, с правой – другое. Разобрав решения, следует подчеркнуть, что каждый шаг одного из них можно перенести в другое. В подобных случаях проявляется умение видеть аналогию, рассуждать по аналогии – база развития интуиции.

Умение применять аналогию нужно поддерживать от класса к классу, пользуясь подходящими возможностями. Так, при решении задачи об углах при основании равнобочной трапеции (8 класс) следует вскрыть ее определенное сходство с теоремой об углах при основании равнобедренного треугольника. Решение задачи происходит на интуитивной основе с использованием аналогии.

Запишем доказательство теоремы и решение задачи «параллельно».

Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство:

1) Пусть ABC – равнобедренный треугольник $(AC = CB)$. Из вершины C проведем высоту CD (рис. 1.1).

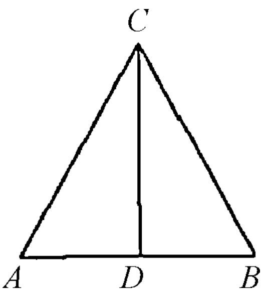


Рис. 1.1. Равнобедренный треугольник

2) $\Delta ACD = \Delta BCD$ по катету и гипотенузе
(CD – общая, $AC = CB$ по условию).
Отсюда $\angle A = \angle B$.

Задача. Доказать, что у равнобочной трапеции углы при основании равны.

Доказательство:

1) Пусть ABCD – равнобокая трапеция $(AD = CB)$. Из вершин D и C проведем высоты DE и CF (рис. 1.2).

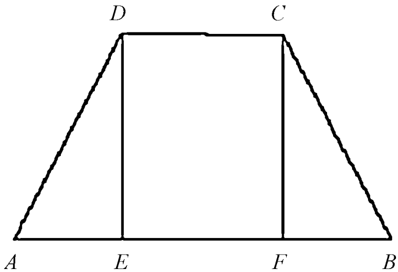


Рис. 1.2. Равнобокая трапеция

2) $\Delta ADE = \Delta BCF$ по катету и гипотенузе
($DE = CF$, т.к. AB||CD;
$AD = CB$ – по условию).
Отсюда
$\angle A = \angle B$ и $\angle ADE = \angle BCF$.
$\angle ADC = \angle ADE + 90^\circ$,
$\angle DCB = \angle BCF + 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADC = \angle DCB$.

Действительно, при сопоставлении доказательств видно, что решение задачи происходит почти полностью аналогично доказательству теоремы, лишь немногим отличаясь от него.

Задачи, аналогичные данным, учащиеся могут составлять самостоятельно и решать их. Полезно предлагать им такие задания, выполнение которых способствует развитию их интуиции, творчества и самостоятельности мышления.

Приведем несколько аналогичных задач на построение из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 7–11» (1993). Это тем более важно, что, как показывает анализ состояния проблемы обучения школьников геометрическим построениям, задачи на построение решаются в школе явно в недостаточном объеме и им не уделяется должного внимания. Однако именно этот материал в силу своей специфики (отсутствие стандартных способов решения, необходимость предвидения и т.д.) наиболее способствует развитию интуиции, а также отвечает задаче активизации познавательной деятельности школьников и развитию их творческих качеств, таких как прогнозирование, оригинальность, критичность, многозначность видения, нелинейность мышления.

Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.	Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.
Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям.	Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.	Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.
Постройте трапецию по диагоналям, углу между ними и одному из оснований.	Постройте параллелограмм по диагоналям и углу между ними.

Полезно представить учащимся данный набор задач в произвольном порядке, а затем предложить им самим разбить все предложенные задачи на пары аналогичных задач.

Рассмотрим решения последней пары аналогичных задач на построение. Анализируя условие и чертеж каждой из задач этой пары, учащиеся интуитивно чувствуют, что решения задач аналогичны. Выводы удобно представить в заготовленной заранее таблице (см. табл. 2), которая вывешивается в заключение.

Можно пойти и иным путем: решения учащимися этих задач сразу выписывать на доске так, как это представлено в таблице, но таким образом целесообразно поступать лишь в том случае, если учащиеся приучены к такой форме работы (а это надо делать постепенно, начиная с простейших задач).

Таблица 2. Решение задач на построение

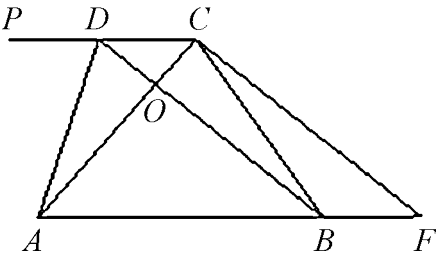
<table>
<tr><td>Постройте трапецию по диагоналям, углу между ними и одному из оснований.</td><td>Постройте параллелограмм по диагоналям и углу между ними.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Анализ</td></tr>
<tr><td>Предположим, что трапеция ABCD построена (рис. 2.1).</td><td>Предположим, что параллелограмм ABCD построен (рис. 2.2).</td></tr>
<tr><td>

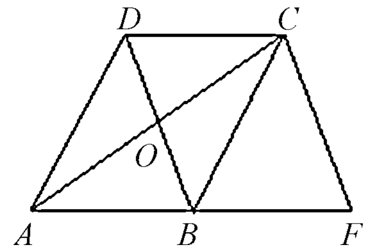
Рис. 2.1. Трапеция</td><td>

Рис. 2.2. Параллелограмм</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Попробуем построить сначала треугольник, используя данные нашей задачи.
Через одну из вершин (C)</td></tr>
<tr><td align="center">трапеции</td><td align="center">параллелограмма</td></tr>
<tr><td colspan="2">проведем прямую, параллельную диагонали BD , до пересечения с продолжением основания AB. Получим треугольник AFC, который можно построить по двум сторонам и углу между ними (AC – дано, $CF = BD$, так как BFCD – параллелограмм, $\angle ACF = \angle AOB$ как соответственные углы при параллельных прямых BD и CF).</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Построение</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Строим треугольник ACF по двум сторонам и углу между ними.</td></tr>
</table>

От точки A на стороне AF отложим отрезок, равный AB. Через точку C проведем прямую CP, параллельную основанию AB; затем через точку B проведем прямую, параллельную FC, до пересечения с прямой CP. Точка D пересечения этих прямых будет четвертой вершиной искомой трапеции ABCD.	Из вершины C проведем медиану CB. Через точки B и C проведем прямые, параллельные соответственно FC и AB. Точка D пересечения этих прямых будет четвертой вершиной искомого параллелограмма ABCD.

Действительно, решив первую задачу и проводя аналогию, учащиеся быстро справляются с решением второй задачи.

Не менее полезно воспитывать у школьников привычку сознательно привлекать аналогию при поиске способов решения предложенной им трудной задачи. Можно рекомендовать учащимся следующий план работы над задачей.

1. Подобрать задачу, аналогичную данной (такую, у которой имелись бы, по сравнению с данной, сходные условия и сходное заключение). Вспомогательная задача должна быть проще данной или такой, решение которой известно.

2. Решить вспомогательную задачу и провести аналогичные рассуждения при решении данной задачи.

Аналогия, как правило, не является доказательным рассуждением. Однако в обучении аналогия часто полезна тем, что она наводит нас на догадки, т.е. служит эвристическим методом. В обучении же математике не менее важно, чем учить доказывать, это учить догадываться, что именно подлежит доказательству и как найти это доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Развитие исследовательских умений учащихся при обучении математике // Всероссийская конф. «Математика и общество. Математическое образование

на рубеже веков»: сб. материалов / М., Дубна: МЦНМО, 2000. С. 315–317.
2. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Развитие мыслительных операций младших подростков в процессе решения математических задач // Математика. Компьютер. Образование: сб. науч. тр. / М.: Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. Вып. 9. Ч. 1. С. 54–58.
3. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1993.
4. Пуанкаре А. Наука и метод // О науке. М.: Наука, 1990.

TRAINING OF PUPILS TO ARGUE BY ANALOGY AS ONE OF THE BASIC COMPONENTS OF DEVELOPMENT OF INTUITION

Shuklina Y. A.

(Russia, Astrakhan)

One of places where the intuition is used, are conclusions by analogy. Application of analogy creates an opportunity for more natural mastering by schoolboys of educational material. We have developed the content and a technique of development of some kinds of intuition by means of the decision of mathematical problems with application of analogy.