СИСТЕМА ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Раббот Ж. М.

(Россия, Москва)

В статье рассмотрены примеры использования циклов взаимосвязанных математических задач для активизации работы школьников в процессе изучения различных тем курса математики. Они прошли апробацию при заочном (дистантном) обучении учащихся ОЛ ВЗМШ, а также использовались и при других формах классной и внеклассной работы с детьми. Указана обширная литература по теории и практике составления наборов таких циклов.

Одно из основных средств обучения математике – решение задач. От того, насколько удачно подобрана система упражнений, напрямую зависит качество обучения. Это особенно важно при традиционном заочном (дистантном) обучении, когда набор задач жестко предопределен пособием и преподаватель не имеет возможности сразу, в процессе работы, прокомментировать решение задачи и скорректировать последовательность выполнения задания.

Опыт работы ОЛ ВЗМШ показал (см. например, [1]), что одно из лучших методических решений этой проблемы – создание циклов взаимосвязанных задач, в которых, как правило, начало цикла – простое упражнение, а конец – важный, зачастую неожиданный и нередко красивый математический факт. Помимо чисто познавательной функции, такие наборы задач несут еще и большую эстетическую нагрузку, они пробуждают и культивируют интерес к предмету, развивая общую культуру и математическое мышление.

Подобные циклы задач издавна использовались в работе легендарных математических кружков при МГУ им. М. В. Ломоносова (см, например, [2]), а также в очной работе с детьми, обучающимися в созданных в начале 60-х годов XX века московских «константиновских» математических школах, где преподавали энтузиасты математического просвещения, молодые математики – студенты, аспиранты и исследователи (например, книга [3], задачи №№ 2–4 на с. 15; №№ 17–27; №№ 41–43).

С тех пор интересные подборки и циклы задач по самым разным темам опубликованы в многочисленных изданиях (масса олимпиадных сборников, где часть задач обычно сгруппирована не по годам, а по темам; статьи в журналах «Квант», «Математика в школе», «Математика» (приложение к газете «Первое сентября») и т.д.).

Приведем несколько примеров.

1. Цикл задач, связанных с изучением одного типа замечательных линий в треугольнике – его высот. Начало цикла – доказательство того, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Это очень непростая задача. Тем более интересным оказывается один из самых коротких и красивых способов ее решения – сведение к легко доказываемой теореме о том, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (проведем через каждую вершину треугольника прямую, параллельную его противоположной стороне, тогда высоты исходного треугольника – серединные перпендикуляры к сторонам достроенного)[2]. Далее можно выявить и доказать много интересных свойств высот и ортоцентрического треугольника (его вершины – основания высот исходного треугольника) – см., например, [4]. Попутно органично используется целый ряд красивых полезных соображений: решение задачи о кратчайшей лома-

[2] В школьном учебнике И.Ф.Шарыгина «Геометрия 7–9» приведены это и еще три (!) других доказательства этого факта.

ной ABC, где данные точки A и C лежат по одну сторону от данной прямой l, а неизвестная точка B – на этой прямой; как построить треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого – данная точка внутри данного угла, а две другие – неизвестные точки на двух сторонах этого угла; свойства вписанных в окружность углов и т.д. Два несколько отличающихся от этого изложения подхода можно найти в классической книге [5] (впрочем, в ней, как и в других книгах этой серии, каждая тема – замечательный цикл задач).

2. Очень хороший пример – целая книга В.Б.Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях»[3]. В ней помещен «цикл» из 352 (!) задач, причем в первой из них автор просит читателя выяснить, когда в довольно простых примерах множеств получается бинарная операция, а когда – нет (это легкое упражнение), а две последние задачи по существу завершают доказательство знаменитой теоремы Абеля: при $n \geq 5$ общее алгебраическое уравнение степени n

$$a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_{n-1}w + a_n = 0$$

неразрешимо в радикалах. Так что в данном случае диапазон от начала цикла до его конца неимоверно широк. Проработав эту книгу от начала до конца, читатель довольно глубоко познакомится с несколькими важнейшими разделами (не только элементарной!) математики.

3. Во время некоторых Всесоюзных математических олимпиад для школьников жюри в одном из туров предлагало участникам небольшие исследования – разбивало трудную задачу на шаги и просило продвинуться как можно дальше в таком цикле задач (см., например, задачи №№ 156–158; 229–234; 244; 246; 251; 255; 303 и др. из книги [6]).

[3] В.Б.Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976 (с тех пор эта книга переиздавалась).

Приведем теперь несколько примеров из пособий ОЛ ВЗМШ.

4. Пособие Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Введение в комбинаторику». Идея задания – не вдаваясь в теорию и не используя стандартные формулы, научить школьников решать комбинаторные задачи путем рассуждений, дать им «почувствовать» простейшие правила комбинаторики – правила суммы и произведения, познакомить в конкретных ситуациях с «формулой включений и исключений». Основные рассуждения касались, в основном, такой задачи: *сколько существует k-значных чисел, цифры которых* (*в десятичной записи*) *расположены в убывающем порядке?*

Эта задача рассматривается постепенно для разных значений k, причем используется своеобразная «двойственность»: оказывается, можно красиво рассматривать параллельно случаи k-значных и $(10–k)$-значных чисел. Затем дается геометрическая интерпретация исходной задачи в виде графа. В итоге школьник получает простейшие навыки комбинаторного мышления и видит красивые, неожиданные связи, казалось бы, совершенно разных разделов курса математики.

5. Пособие Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Делимость целых чисел». Вся богатая тема, традиционно изучающаяся как на школьных уроках, так и на занятиях математических кружков, широко представленная на соревнованиях всех уровней, разбита в этом пособии на ряд циклов задач. Естественно, закончив цикл, авторы формулируют основные достигнутые результаты и комментируют их. Охарактеризовать циклы можно, просто приведя оглавление пособия: делимость суммы, разности и произведения; деление с остатком; делители; простые числа; наибольший общий делитель, взаимно простые числа; основная теорема арифметики; прямые на решетке, линейные уравнения; алгоритм Евклида.

6. Пособия П. Р. Кантор и Ж. М. Раббота «Площади многоугольников» и одноименное пособие Н.Б.Васильева. Основные циклы задач: разрезание и складывание геометрических фигур;

площадь треугольника и отношение площадей; площади подобных фигур; площадь помогает в доказательствах (в частности, использование площадей для доказательства теоремы Чевы); сравнение площадей; заканчивается изложение циклом задач, приводящим к доказательству формулы Пика площади многоугольника на клетчатой бумаге.

Рассмотренные примеры позволяют, в частности, сделать вывод о том, что каждый удачный цикл задач непосредственно связан с каким-либо важным фактом, который может быть в дальнейшем успешно использован.

В связи с этим обстоятельством введем следующее понятие (см., например, [7], [8]; впрочем, варьируя названия, его рассматривали многие специалисты).

Назовем ***базисной*** *нестандартную задачу, имеющую многочисленные приложения как в теоретическом, так и в практическом плане.*

Слово «базисный» часто встречается в математике (и в педагогике) в различном контексте, но оно имеет всегда оттенок фундаментальности, основательности, так что, несмотря на некоторую расплывчатость данного определения, обычно бывает ясно, когда мы имеем дело с такого рода задачами.

В статье [7] приведен подробный разбор одного из примеров базисной задачи, пронизывающей многие темы программы математического отделения ОЛ ВЗМШ, – исследование функции $y = \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \ldots + \alpha_n|x - a_n|$. Как видно из этого разбора, характерной особенностью базисной задачи служит наличие у нее (в терминологии Г. В. Дорофеева – см. [8]) «букета окрестностей», или, что то же самое, нескольких окрестностей (терминология Д. Пойа – см. [9]) – это и означает «многочисленность приложений», упомянутую в выделенном определении. Каждая такая окрестность и дает нам возможность составить цикл взаимосвязанных задач. Конечно, для этого надо суметь квалифицированно проанализировать задачу, рассматриваемую в качестве кандидата на базисную, исследуя ее окрестности, а также «зацепляя» их друг за друга.

Схема такого анализа предложена В. Л. Гутенмахером (см. [10]): коротко говоря, это обобщение с точки зрения общематематических идей и методов, исследование адекватности задачи уровню обучаемых и контексту, в котором задача предлагается. При анализе необходимо выявить роль различных элементов букета окрестностей в процессе обучения: закрепление теории, обобщение, исследование по аналогии, привитие технических навыков и т.п. – см. также статью [8].

Как видно даже из простого перечисления этапов исследования, оно требует высокой квалификации как с математической, так и с педагогической точки зрения. Примеры рассмотрения одной-двух окрестностей (как правило, довольно трудных) задач можно найти в книге [11], где решение практически каждой задачи обобщается, а иногда еще и комментируется под рубрикой «для знатоков»; здесь каждая подробно разобранная в основном тексте задача может претендовать на роль базисной.

Обязательным этапом исследования предлагаемого нового пособия должен служить анализ окрестности базисной задачи с точки зрения дидактики – т.е. (см. [8]) изучение окрестности простых упражнений, окрестности обобщений, окрестности поисковых задач, окрестности аналогичных задач и т.п. Как считал знаменитый математик и педагог Г. Фрейденталь, «…здоровым принципом является изучать не изолированные крохи, а согласованные разделы. То, что взаимосвязано, легче изучается и легче удерживается…» – см. [12], с. 62.

7. Приведем еще один пример использования рассматриваемого подхода в программе ОЛ ВЗМШ. Речь идет о новом пособии [13], посвященном решению задач с параметрами – разделу, ставшему за последние десятилетия обязательным и на вступительных экзаменах в вузы, и на выпускных экзаменах в школах.

Сначала речь идет о самых простых вещах – линейная функция, системы двух линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными. Уже на этом, сравнительно простом, материале можно проследить важные идеи рассматриваемой темы.

Затем, конечно, идет атака на квадратный трехчлен – все основные аспекты исследования: существование и знаки корней, расположение корней относительно некоторых числовых множеств на числовой прямой. Упор опять-таки делается на основные идеи – равносильность и следствие, как оценить значение выражения, увидеть и использовать симметрию, вовремя нарисовать чертеж, чтобы понять по нему ситуацию. Затем вводится понятие фазовой плоскости и показаны приемы ее использования при решении довольно трудных задач.

Таким образом, можно сказать, что вся тема разбита на циклы, в центре каждого из которых стоит своя базисная задача. Изложение темы – исследование некоторых окрестностей базовой задачи.

В заключение рассмотрим еще один пример.

8. Особый жанр учебной литературы представляет так называемая «рабочая тетрадь». В педагогической теории и практике этот жанр пока не получил точного определения, и под этим термином понимаются иногда самые разнообразные виды учебных пособий. Мы рассмотрим сейчас пособия [14]. Это две части большого учебно-методического комплекта для средней школы по планиметрии, базирующегося на учебнике И. Ф. Шарыгина «Геометрия 7–9». В настоящее время в него входят более 15 пособий, начиная с «Наглядной геометрии» И. Ф. Шарыгина и кончая серией книг Е. С. Смирновой, очень интересного и опытного учителя, приверженца педагогической идеологии Игоря Федоровича.

Отметим, прежде всего, что рассматриваемые книги, по замыслу их авторов, призваны облегчить учителю и школьнику работу над нелегким учебником по очень непростому предмету, требующему творческого подхода к решению практически каждой задачи. Концепция учебника не позволяет ограничиваться только стандартными упражнениями на закрепление формул, она стимулирует мысль, заставляет ученика (и учителя) стараться шире подходить к решению проблем, воспитывать и использовать геометрическое воображение, использовать различные идеи и методы. Для этого особенно важно создать циклы задач, позволяющие выделить основные идеи и воспитать необходимые навыки. Предназначенная для обычных школ, тетрадь не должна, по мнению авторов, содержать слишком сложные задачи (их и так вполне достаточно в самом учебнике), но в ней учитель может найти необходимое количество легких и средних задач на каждый фрагмент курса.

Вот пример набора задач на очень важную тему – угол между касательной и хордой.

а) Пусть две окружности пересекаются в точках M и N и через точку T одной из них проведены прямые TM и TN, пересекающие вторую окружность в точках A и B соответственно. Докажите, что касательная к первой окружности в точке T параллельна прямой AB.

б) Через точку N касания двух окружностей проведены две прямые, AB и CD, где точки A и C принадлежат одной окружности, а точки B и D – другой. Докажите, что хорды AC и BD параллельны.

А вот два цикла задач на очень важную тему – «Вспомогательная окружность».

Первый цикл (можно сравнить с примером 1 – это его часть).

а) В треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, $\angle A = 80^0$, $\angle B = 40^0$. Найдите углы: AHB, AB_1A_1, HAC, B_1A_1C, AA_1B_1, $B_1A_1C_1$.

б) Пусть BB_1 – высота остроугольного треугольника ABC, H – точка пересечения его высот. Продолжим BB_1 до пересечения с описанной около треугольника окружностью в точке M. Найдите: 1) $\angle CAM$, если $\angle HAB_1 = 40^0$; 2) AM, если $AH = n$; 3) продолжим высоты AA_1 и CC_1 до пересечения с описанной окружностью в точках P и N соответственно. Докажите, что BM, AP и CN – биссектрисы треугольника MNP.

в) Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, R – радиус описанной около него окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AHC, если: 1) треугольник ABC остроугольный; 2) треугольник ABC тупоугольный.

Второй цикл (основной используемый факт – равенство касательных, проведенных к окружности из одной точки).

а) Пусть в треугольнике ABC известны его стороны: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 6$. Найдите отрезки, на которые делятся его стороны точками M, N и P касания со вписанной окружностью.

б) Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 3, 6, 7, 8, 10. Можно ли в него вписать окружность?

в) Пусть для сторон четырехугольника $ABCD$ выполнены равенства $AB - BC = a$, $CD - DA = b$ и пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются отрезка AC в точках K и M соответственно. Найдите KM.

г) Стороны шестиугольника, описанного около окружности, равны последовательно 1, 2, 3, 4, 5. Найдите его шестую сторону.

д) Могут ли стороны шестиугольника, описанного около окружности, взятые в каком-нибудь порядке, быть равны 3, 5, 7, 8, 9, 9?

е) На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что окружности, вписанные в треугольники ACD и ABD, касаются между собой. Найдите BD, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Приведем еще пример.

В задачниках по геометрии часто можно увидеть цикл задач, связанных с тем обстоятельством, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (аналог теоремы Пифагора для параллелограмма). После доказательства этого факта обычно предлагают (в разном порядке) следующий цикл задач.

а) Середины сторон любого четырехугольника образуют параллелограмм, стороны которого равны половинам диагоналей четырехугольника и равны их половинам соответственно.

б) Если четырехугольник выпуклый, то площадь указанного в предыдущей задаче параллелограмма равна половине площади четырехугольника.

Эту же задачу можно дать в гораздо более усложненной форме.

*б**) Докажите, что если середины сторон двух выпуклых четырехугольников совпадают, то их площади равны.

в) Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна трем четвертям суммы квадратов его сторон.

г) Докажите, что сумма квадратов средних линий четырехугольника вдвое меньше суммы квадратов его диагоналей (под средней линией мы понимаем здесь отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

е) Что можно сказать о четырехугольнике, если середины его сторон образуют: 1) квадрат; 2) прямоугольник; 3) ромб?

ж) В четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD перпендикулярны, длина отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC, равна a. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

А вот какой цикл задач предложен в [14] после только что указанных.

Возьмем внутри выпуклого четырехугольника произвольную точку X. Построим новый четырехугольник, вершины которого соответственно симметричны точке X относительно середин всех сторон четырехугольника.

а) Что можно сказать о вновь построенном четырехугольнике?

б) Пусть новый четырехугольник – прямоугольник. Что можно сказать об исходном четырехугольнике?

в) Тот же вопрос, если новый четырехугольник – ромб.

г) Тот же вопрос, если новый четырехугольник – квадрат.

Подводя итоги, заметим, что новые технологии в образовании, связанные с интерактивным использованием компьютеров, открывают перед авторами учебных пособий новые возможности. Так, например, можно предоставить школьникам возможность экспериментировать и самим ставить дополнительные вопросы и исследовать все новые и новые особенности рассматриваемых конструкций. Все это стимулирует работу по созданию пособий нового поколения и дальнейшей разработке теории и практики преподавания в современных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раббот Ж. М. Основные методические принципы составления учебных пособий и контрольных заданий для заочной математической школы. В сб. «Заочное обучение математике школьников 8–10 классов» (сборник научных трудов). Выпуск I. – М.: НИИСиМО АПН СССР, 1975.
2. Сборник задач московских математических олимпиад. Составитель А. А. Леман, под редакцией В. Г. Болтянского. – М.: Просвещение, 1965.
3. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. Библиотечка физико-математической школы. Математика. Выпуск 3. – М.: «Наука», 1965.
4. Егоров А. Ортоцентрический треугольник. «Квант» № 4, 2001 г.
5. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. Библиотека математического кружка. Выпуск 10. (Любое издание). Темы 5 и 6.
6. Васильев Н. Б., Егоров А. А.. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. Библиотека математического кружка. Выпуск 18. – М.: «Наука», 1988.
7. Раббот Ж. М. Базисная задача – основа циклов взаимосвязанных задач – как дидактическое средство при заочном факультативном обучении школьников математике. В сб. «Повышение уровня математической подготовки школьников средствами заочного обучения» (сборник научных трудов). – М.: НИИСиМО АПН СССР, 1984.
8. Дорофеев Г. В. О составлении циклов взаимосвязанных задач. – М.: «Математика в школе», № 6, 1983.
9. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: «Наука», 1976 (и другие издания).
10. Гутенмахер В. Л. Основные аспекты анализа математических задач. В сб. «Заочное обучение математике школьников YШ–X классов (сборник научных трудов). Выпуск VIII. – М.: НИИСиМО АПН СССР, 1977.
11. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Работ Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. – М.: «Наука», 1981 (1-е изд.); 1986 (2-е изд.).
12. Фрейденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч.I. – М.: «Просвещение», 1982.

13. Е. А. Бернштейн, Н. В. Попов. Задачи с параметрами. – М.: ОЛ ВЗМШ, 2002.
14. Егоров А. А., Раббот Ж. М. Геометрия. Рабочая тетрадь к учебнику Шарыгина И. Ф. «Геометрия 7–9». 8 класс. Части первая и вторая. – М.: «Дрофа», 1999 (и другие издания).

SYSTEM OF INTERCOMMUNICATED MATHEMATICAL PROBLEMS AS A MEANS OF BRISKING UP THE APPREHENDING ACTIVITY OF SCHOOL CHILDREN

Rabbot Zh. M.

(Russia, Moscow)

The article deals with the examples of using the cycles of intercommunicated math prob-lems for improving the students' work in studying different themes of mathematics. These prob-lems have been approbated in distant teaching the schoolchildren in OL VZMSC and been used in other forms of class and out of class work with children. Voluminous literature on theory and practice of making up sets of such cycles is mentioned.