ДИНАМИКА ЦЕНЫ ОПЦИОНА ДЛЯ АКТИВОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ BLEND-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Шаповалов А. В., Трифонов А. Ю., Масалова Е. А.

(Россия, Томск)

Рассмотрена модифицированная модель Блэка и Шоулза, в которой цены акций портфеля описываются смешанным нормальным-логнормальным распределением. Конечные условия (payoff conditions) для уравнения Блэка и Шоулза выбираются в виде, эмпирически учитывающем нелинейный характер осреднения доходов. Построена обратная по времени функция Грина для цены опциона.

Финансовые компании разрабатывают и используют программные продукты, pricing software, позволяющие производить оценку ликвидности активов на рынке с использованием дериватив различных видов (см., например, сайты компаний

«JPMorgan» (http:// www.jpmorgan.com/cm),

«Econophysica» (http:// www.econophysica.com/,

http: //eco.ph.qmw.ac.uk/,

«Suite» (http://www.suitellc.com/) и многих других).

Их цель состоит в том, чтобы снабдить пользователей дериватив удобным и эффективным инструментом оценки широкого спектра опционов. Программные продукты создаются на основе известных математических моделей, таких, например, как модель Блэка и Шоулза [1]. В этой модели цена опциона выражается в терминах цены акции в предположении об «идеальных условиях» на рынке акций и опционов ([1], с. 640), в список которых, в частности, входит предположение о логнормальном распределении возможных цен акций в конце каждого временного интервала. Анализ реальных финансовых данных показывает наличие флуктуаций в ценах акций, описание которых отклоняется от логнормального распределения (см., например, [2, 3]). Применение модели Блэка и Шоулза в практике финансовых операций повлекло проверку адекватности основных допущений модели, что, в свою очередь, выявило недостаточность предположения о логнормальном распределении и обусловило интерес к различным модификациям модели Блэка и Шоулза. В ряде модифицированных моделей логнормальный закон заменяется другими распределениями, вид которых определялся эмпирически (см. [4] и цитированную там литературу).

В работе рассматривается модифицированная модель Блэка и Шоулза динамики цены опциона $V(t,\mathbf{S})$, зависящего от поведения цен $\mathbf{S}=\left(S_j, j=1,...,\mathrm{n}\right)$ акций. Модификация выражается следующими условиями.

Динамика цены каждой из n акций портфеля описывается blend-моделью, которая представляет собой смесь нормальной и логнормальной компонент. «Вес» нормальной и логнормальной компонент определяется параметрами β_j. Нормальный и логнормальный пределы задаются условиями $\beta_j \to 1$ и $\beta_j \to 0$ соответственно. Отметим также, что граничные условия (payoff conditions) для уравнения Блэка и Шоулза могут быть обобщены. В отличие от обычных условий для call- и put- опционов можно положить

$$\max \ (\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} a_j \ \ S_j^{p_j} - K, \ 0)\,. \tag{1}$$

Здесь a_j, p_j, K – вещественные параметры задачи; K – стоимость опциона, a_j – количество акций j – вида. Условие (1) учитывает нелинейный характер осреднения доходов посредством введения параметров p_j, значения которых определяются эмпирически (см., например, [5]).

Модифицированное уравнение Блэка–Шоулза запишем в виде

$$[\partial_t + \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}_i (S_i + a_i)\partial_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \hat{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j (S_i + a_i)(S_j + a_j)\partial_{ij} - \\ -r]V(\mathbf{S},t) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\partial_t = \partial / \partial_t$, $\partial_i = \partial / \partial S_i$, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$; $i, j = 1,\ldots,n$; $\hat{\mu}_i = (1-\beta_i)(S_i(0))^{-\beta_i}\mu_i$ – коэффициент тренда цены i-й акции; $\hat{\sigma}_i = (1-\beta_i)(S_i(0))^{-\beta_i}\sigma_i$ – дисперсия цены опциона, ρ_{ij} – корреляционная матрица, $a_i = \beta_i S_i(0)(1-\beta_i)^{-1}$ – вещественный параметр, β_i – параметры смешивания, означающие «веса» нормальных и логнормальных компонент в модифицированной модели. Параметр r имеет смысл темпа инфляции.

Логнормальные распределения для цен акций реализуются, если параметры $\beta_i \to 0$. В этом случае уравнение (2) переходит в известное классическое уравнение Блэка–Шоулза [1, 6]:

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij} \cdot S_i \cdot S_j \partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i \cdot S_i \partial_i - r\right)V(\mathbf{S},t) = 0.$$

При $\beta_i \to 1$ распределение цен акций нормально, а уравнение (2) принимает вид $\left(\partial_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}\partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i \partial_i - r\right)V(\mathbf{S},t) = 0$.

Рассмотрим метод решения уравнения (2). Перепишем его в более простых обозначениях. Заменив $\hat{\mu}_i \to \mu_i$, $\hat{\sigma}_i \to \sigma_i$, получим:

$$[\partial_t + \sum_{i}\mu_i (S_i + a_i)\partial_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}(S_i + a_i)(S_j + a_j)\partial_{ij} - r]V = 0.$$

В работе [7], где рассматривалось аналогичное уравнение, использовались «информационные переменные» $x_i = \ln(S_i + a_i)$, позволившие проинтегрировать уравнение. Следуя [7], введем замену переменных $t' = t$, $y_i = \ln(S_i + a_i) - \int_{t_0}^{t} \mu_i(\xi)\, d\xi$, $V(\mathbf{S}, t) = e^{rt}\, v(\mathbf{y}, t)$, которая приводит уравнение (2) к виду

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\, \partial_{y_i} \partial_{y_j}\right) v(\mathbf{y}, t) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{y} = (y_i,\, i = 1, \ldots, \mathrm{n})$, $\partial_{y_i} = \partial / \partial y_i$, t_0 – постоянная. Отметим, что, в соответствии с проведенными выше преобразованиями, переменные y_i изменяются в пределах: $-\infty < y_i < +\infty$. Для уравнения (3) определим функцию Грина условиями

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\left\langle \partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{A}\, \partial_{\mathbf{y}} \right\rangle\right) G(t, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \tag{4}$$

$$G(t, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{z})\big|_{t \to \tau} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z}). \tag{5}$$

Здесь $\left\langle \partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{A}\, \partial_{\mathbf{y}} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{\mathrm{n}} A_{ij} \partial_{y_i} \partial_{y_j}$, $A_{ij} = A_{ij}(t) = \sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{ij}(t)$, $\delta(\mathbf{x})$ – δ-функция Дирака. Отметим, что коэффициенты в уравнении (4) не зависят от y_i. Соотношение (5) является конечным условием для функции $G(t, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\tau = T\,(> t)$ – время реализации опциона. Уравнение (4) может быть решено с помощью преобразования Фурье.

Определим прямое преобразование Фурье выражением

$$F\big|_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}}\, \varphi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} e^{-i\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \tilde{\varphi}(\mathbf{p}), \tag{6}$$

где угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов $\langle \mathbf{x},\mathbf{p}\rangle = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_i p_i$. Соответственно, обратное преобразование имеет вид

$$F\Big|_{\mathbf{p}\to\mathbf{x}}\tilde{\varphi}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} e^{i\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle}\tilde{\varphi}(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{x}) . \tag{7}$$

Фурье-образ функции Грина обозначим через

$$\tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} e^{-i\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle} G(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{z})\, d\mathbf{x} .$$

Преобразование (6) приводит уравнение (4) к следующему виду: $\partial_t \tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z}) - \frac{1}{2}\langle \mathbf{p}, \mathbf{A}(t)\mathbf{p}\rangle \tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z}) = 0$, откуда, после интегрирования, находим: $\tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z}) = N(\tau,\mathbf{z})\exp\left(\frac{1}{2}\int_\tau^t \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}(\xi)\mathbf{p}\rangle d\xi\right)$.

Здесь $N(\tau,\mathbf{z})$ играет роль постоянной интегрирования по переменной t и определяется из условия (5). Преобразование Фурье (6) условия (5) дает

$$\tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z})\Big|_{t\to\tau} = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} e^{-i\langle \mathbf{p},\mathbf{z}\rangle} .$$

Определим функцию $N(\tau,\mathbf{z})$, положив

$$\tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z})\Big|_{t\to\tau} = N(\tau,\mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} e^{-i\langle \mathbf{p},\mathbf{z}\rangle} ,$$

откуда

$$\tilde{G}(t,\tau,\mathbf{p},\mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} \exp\left(-i\langle \mathbf{p},\mathbf{z}\rangle + \frac{1}{2}\int_\tau^t \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}(\xi)\mathbf{p}\rangle d\xi\right). \tag{8}$$

Обратное преобразование Фурье (7) функции (8) определяет функцию Грина исходного уравнения (4) в следующей форме:

$$G(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{n}}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} \exp\left(i\langle \mathbf{x}-\mathbf{z},\mathbf{p}\rangle - \frac{1}{2}\int_t^\tau \langle \mathbf{p},\mathbf{A}(\xi)\mathbf{p}\rangle d\xi \right) d\mathbf{p}\,, \quad (9)$$

где следует положить $\tau = T\ (>t)$ – момент исполнения опциона. Интеграл по переменным $\mathbf{p}$ сходится при условии, если матрица $B_{ij}(t) = \int_t^T A_{ij}(\xi)\,d\xi$ положительно определена. Последнее условие не является существенным ограничением, поскольку элементы матрицы $A_{ij}(t) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ неотрицательны. Соответственно, матрица $B_{ij}(t)$ имеет неотрицательные элементы и во многих случаях оказывается неособенной. Условие положительной определенности может нарушиться для вырожденной матрицы A_{ij}. В этих случаях, тем не менее, функция Грина также может быть построена, но для этого требуется дополнительное определение несобственного многомерного интеграла по переменным $\mathbf{p}$ в выражении для функции Грина [8]. Отметим, что с помощью функции Грина более удобно использовать обобщенные граничные условия (1), анализ которых выходит за рамки данной работы.

В качестве иллюстрации рассмотрим одномерный случай $(\mathrm{n}=1)$, под которым понимается портфель, состоящий из одной акции. В этом случае уравнение (2) записывается в виде

$$\left(\partial_t + \mu(S+a)\partial_S + \frac{1}{2}\rho\sigma^2 (S+a)^2 \left(\partial_S\right)^2 - r \right) V(S,t) = 0\,. \quad (10)$$

Заменой переменных
$V(S,t) = e^{rt} v(y,t)\,, \quad t' = t\,, \quad y = \ln(S+a) - \int \mu(t)dt\,, \quad -\infty < y < +\infty\,,$
приведем уравнение (10) к виду (штрих у переменной t' опущен):

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \rho \left(\partial_y\right)^2 \right) v(y,t) = 0\,. \quad (11)$$

Матрица **A** здесь является неотрицательной функцией $A = A(t) = \sigma^2(t)\rho(t)$. Функция Грина $G(t,\tau,y,z)$ для данного уравнения, найденная из условий (4), (5), определяется выражением (9), которое при $n=1$ принимает вид

$$G(t,\tau,y,z) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ip(y-z) - \frac{1}{2} p \int_t^{\tau} A(\xi) d\xi \right) dp \,.$$

Обозначим $L(\tau,t) = \int_t^{\tau} A(\xi)\, d\xi \ge 0$. Как и в многомерном случае, будем полагать $\tau = T\,(>t)$, где T – момент исполнения опциона. Тогда для функции Грина уравнения (11) имеем:

$$G(t,\tau,y,z) = \left(2\pi L(\tau,t)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(y-z)^2}{2L(\tau,t)} \right). \tag{12}$$

Выражение (12) в частных случаях совпадает с известными результатами. Подробный вывод формулы Блэка–Шоулза с помощью функции (12) можно найти, например, в [6].

В заключение отметим, что исходное уравнение (2) феноменологически обобщает известное уравнение Блэка–Шоулза на случай акций, подчиняющихся смешанному нормально-логнормальному распределению. Это уравнение приводится к стандартному уравнению Блэка–Шоулза с помощью преобразований координат и тем самым может быть полностью исследовано. Уравнение (2) можно рассматривать как пример непрерывной деформации стандартного уравнения Блэка–Шоулза, соответствующего деформации функции распределения активов. Представляет интерес рассмотреть и другие возможности описания деформированных распределений. В частности отметим, что как стандартное, так и модифицированное уравнение Блэка–Шоулза (2) интегрируются методом полного разделения переменных, который может быть использован для исследования данной задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ - 5103.2006.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F. and Scholes M. The Pricing of Option and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–654.
2. Mandelbrot B.B. The variation of certain speculative prices // J. Business 1963. Vol. 36. P. 392–417.
3. Peters E.E. Fractal market analysis. – New York: John Wiley and Sons, 1994. – 315 pp.
4. Matacz A. Financial modeling and option theory with the truncated Levy process // Int. J. of Theoretical and Applied Finance. 2000. Vol. 3. No. 1. P. 143–160.
5. Маслов В.П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций // Теория вероятностей и ее прил. 2003. Т. 48. № 4. С. 799–810.
6. Wilmott P., Howison S., Dewynne J. The Mathematics of Financial Derivatives. A Student Introduction. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 317 pp.
7. Shapovalov A.V., Evdokimov E.V. Hamiltonian dynamics of Darwin systems // Physica D. 1998. Vol. 112. P. 441–450.
8. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю.. Методы математической физики. – Томск: Изд–во «НТЛ». 2001. В 3-х томах. Т. 2. – 646 стр.

OPTION PRICE DYNAMICS FOR BLEND-DISTRIBUTED STOCKS

Shapovalov A. V., Trifonov A. Yu., Masalova E. A.

(Russia, Tomsk)

A modified Black-Scholes model is considered in which prices of portfolio stocks are described by the blend of normal – lognormal distribution. The final (payoff) conditions are taken for the Black-Scholes equation in the form that empirically considers nonlinear character of income averaging. The time-inverse Green function is found for the option price in the model considered.