# СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕНУЛЕВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

**Баева О. В.**

(Россия, Рязань)

*В статье рассматривается нелинейная неавтономная конечномерная $T$ - периодическая по времени система дифференциальных уравнений с векторным параметром $\nu$. Определяются условия, при которых решение рассматриваемой системы является периодическим.*

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = \mu(\varepsilon) + \Phi(t, \varphi, x, \nu) \tag{1}$$

при следующих условиях:

а) $x \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\nu = (\lambda, \varepsilon)$, $\mathbb{R}^s - s$-мерное векторное пространство;

б) $\mu(\varepsilon), \Phi(t, \varphi, x, \nu)$ — $n-m$ -мерные вектор-функции;

в) правые части системы (1) непрерывны по своим переменным, T – периодические по t на множестве $\mathrm{M} = [0, T] \times \mathbb{R}^{n-m} \times \mathrm{X}(r) \times \mathrm{M}_0(r)$, $\mathrm{X}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \le r\}$, $\mathrm{M}_0(r) = \{\nu : \|\nu - \bar{\nu}\| \le r\}$, $\bar{\nu}$ — некоторый постоянный вектор, $r > 0$ — произвольное число;

г) на множестве $\mathrm{M}$ справедливы неравенства:

$$\|\Phi(t, \varphi', x', \nu') - \Phi(t, \varphi'', x'', \nu'')\| \le c_1(r) \cdot \|\varphi' - \varphi''\| + c_2(r) \cdot \|x' - x''\| +$$
$$+ c_3(r) \cdot \|\nu' - \nu''\|,$$

$c_1(r) \to 0, c_2(r) \to 0, c_3(r) \to 0$ при $r \to 0$,

$\|\mu(\varepsilon') - \mu(\varepsilon'')\| \le p(r) \cdot \|\varepsilon' - \varepsilon''\|$, $p(r) \to 0$ при $r \to 0$,

где $c, c_1, c_2, c_3, p$ — некоторые числа, $\Phi(t,\varphi,0,\nu) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(t,\varphi,x,\nu) = 0$ равномерно относительно $t,\varphi,\nu$ на множестве $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathrm{M}_0(r) \times [0,\mathrm{T}]$;

д) уравнение $\mu(\varepsilon) = 0$ имеет решение $\varepsilon^*$;

е) на множестве $\mathrm{E}(\delta_0) = \{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \|\bar{\varepsilon}\| \le \delta_0\}$

$\mu(\varepsilon^* + \bar{\varepsilon}) = \Theta(\bar{\varepsilon}) = \mathrm{B} \cdot \bar{\varepsilon} + \Theta_1(\bar{\varepsilon})$,

$\|\Theta_1(\bar{\varepsilon}') - \Theta_1(\bar{\varepsilon}'')\| \le \gamma(\delta) \cdot \|\bar{\varepsilon}' - \bar{\varepsilon}''\|$, $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0, \delta \in (0,\delta_0]$.

Класс $\mathrm{T}$-периодических по $t$ функций $F(\varphi,t)$, таких что $\|F(t,\varphi)\| \le d$, $\|F(t',\varphi') - F(t'',\varphi'')\| \le q_1 \cdot |t' - t''| + q_2 \cdot \|\varphi' - \varphi''\|$, $q_1 \to 0, q_2 \to 0$ при $d \to 0$ обозначим $C(d)$.

Предполагаем, что если любую $\mathrm{T}$-периодическую по $t$ функцию $F(t,\varphi) \in C(d)$ вместо вектора $x$ подставить в систему (1), то эта система будет иметь решение, определенное на [0,T].

Для системы (1) ставится задача – определить условия, при которых решение системы (1) является $\mathrm{T}$-периодическим.

Для решения системы уравнений

$$\dot{\varphi} = \mu(\varepsilon) + \Phi(t,\varphi,F(t,\varphi),\nu),$$

удовлетворяющего начальным данным $\varphi(0) = \varphi_0$, примем следующее обозначение: $\varphi_t = R^F(t,\varphi_0,\nu)$.

**Лемма.** Пусть $\varphi_t' = R^F(t,\varphi_0,\nu')$, $\varphi_t'' = R^F(t,\varphi_0,\nu'')$.

Тогда при $t \in [0,\mathrm{T}]$ выполнено неравенство

$$\|\varphi_t' - \varphi_t''\| \le \mathrm{T}(c_3(r) + p(r)) \cdot e^{(c_1(r) + c_2(r) q_2)\mathrm{T}} \cdot \|\nu' - \nu''\|. \qquad (1.1)$$

Доказательство леммы приведено в работе [1].

Далее будем предполагать, что для системы (1) выполнены условия а) – д).

Рассмотрим уравнение

$$\mu(\varepsilon)\cdot \mathrm{T} + \int_0^{\mathrm{T}} \Phi\left(t, \varphi_t, F(t,\varphi_t), \nu\right) dt = 0. \qquad (2)$$

Пусть матрица B — неособенная.

*Ставится задача* — определить условия, при которых уравнение (2) разрешимо относительно $\varepsilon$.

Введя замену переменных $\varepsilon = \varepsilon^* + \bar{\varepsilon}$ и учитывая условие е), получим систему

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\mathrm{B}^{-1}}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \left[\Phi\left(t, \varphi_t, F(t,\varphi_t), \bar{\nu}\right) + \Theta_1(\bar{\varepsilon})\right] dt, \qquad (3)$$

где $\bar{\nu} = \left(\lambda, \varepsilon^* + \bar{\varepsilon}\right)$.

Вопрос о разрешении уравнения (2) относительно $\bar{\varepsilon}$ сводится к проблеме существования неподвижной точки (по $\bar{\varepsilon}$) оператора

$$\Gamma_F(\bar{\varepsilon}) = -\frac{\mathrm{B}^{-1}}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \left[\Phi\left(t, \varphi_t, F(t,\varphi_t), \bar{\nu}\right) + \Theta_1(\bar{\varepsilon})\right] dt.$$

**Теорема.** Если B — неособенная матрица, то существуют числа $d_1 > 0, \delta_1 > 0$ такие, что для любой функции $F(t,\varphi) \in C(d_1)$ система (3) имеет единственное решение во множестве

$$\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \|\bar{\varepsilon}\| \le \delta_1\right\}.$$

*Доказательство.*

Докажем, что оператор $\Gamma_F(\bar{\varepsilon})$ является сжимающим во множестве $\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \|\bar{\varepsilon}\| \le \delta_1\right\}$.

Действительно, для любых $\bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon}''$, принадлежащих множеству $\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \left\|\bar{\varepsilon}\right\| \le \delta_1\right\}$, должно выполняться неравенство

$$\left\|\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}'\right) - \Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}''\right)\right\| \le \beta \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\|, \; 0 < \beta < 1 .$$

Для того чтобы показать, что выполняется данное неравенство, заметим, что

$$\left\|\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}'\right) - \Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}''\right)\right\| \le \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \left\|\Phi\left(t, \varphi_t', F\left(t, \varphi_t'\right), \bar{v}'\right) + \Theta_1\left(\bar{\varepsilon}'\right) - \right.$$

$$\left. -\Phi\left(t, \varphi_t'', F\left(t, \varphi_t''\right), \bar{v}''\right) - \Theta_1\left(\bar{\varepsilon}''\right)\right\| dt \le \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \left(\left\|\Phi\left(t, \varphi_t', F\left(t, \varphi_t'\right), \bar{v}'\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\Phi\left(t, \varphi_t'', F\left(t, \varphi_t''\right), \bar{v}''\right)\right\| + \left\|\Theta_1\left(\bar{\varepsilon}'\right) - \Theta_1\left(\bar{\varepsilon}''\right)\right\|\right) dt \le \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \left(c_1\left(r\right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left\|\varphi_t' - \varphi_t''\right\| + c_2\left(r\right) \cdot \left\|F\left(t, \varphi_t'\right) - F\left(t, \varphi_t''\right)\right\| + c_3\left(r\right) \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\| +$$

$$\left. +\gamma\left(\delta\right) \cdot \left\|\bar{\varepsilon}' - \bar{\varepsilon}''\right\|\right) dt = \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \cdot [\mathrm{T} \cdot \left(c_3\left(r\right) + \gamma\left(\delta\right)\right) \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\| +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} \left(c_1\left(r\right) + c_2\left(r\right) q_2\right) \cdot \left\|\varphi_t' - \varphi_t''\right\| dt \cdot$$

Отсюда и из неравенства (1.1) выводим

$$\left\|\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}'\right) - \Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}''\right)\right\| \le \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \cdot [\mathrm{T}(c_3\left(r\right) + \gamma\left(\delta\right)) \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\| +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} (c_1\left(r\right) + c_2\left(r\right) q_2)\mathrm{T} \cdot \left(c_3\left(r\right) + p\left(r\right)\right) e^{(c_1(r) + c_2(r) q_2)\mathrm{T}} \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\| dt] =$$

$$= \left\|\mathrm{B}^{-1}\right\| \cdot [c_3\left(r\right) + \gamma\left(\delta\right) + (c_1\left(r\right) + c_2\left(r\right) q_2)\mathrm{T} \cdot \left(c_3\left(r\right) + p\left(r\right)\right) \cdot$$

$$\cdot e^{(c_1(r) + c_2(r) q_2)\mathrm{T}}] \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\| = \beta \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\|,$$

где $\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\| \cdot [c_3(r)+\gamma(\delta)+(c_1(r)+c_2(r)q_2)\mathrm{T}\cdot\left(c_3(r)+p(r)\right)\cdot$
$\cdot e^{(c_1(r)+c_2(r)q_2)\mathrm{T}}] \to 0$ при $r \to 0$, $\delta \to 0$ и $d \to 0$.

Таким образом, получили

$$\left\|\Gamma_F(\bar{\varepsilon}') - \Gamma_F(\bar{\varepsilon}'')\right\| \le \beta \cdot \left\|\bar{v}' - \bar{v}''\right\|.$$

Докажем, что оператор $\Gamma_F(\bar{\varepsilon})$ отображает множество $\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \left\|\bar{\varepsilon}\right\| \le \delta_1\right\}$ в себя.

То есть нужно доказать, что $\left\|\Gamma_F(\bar{\varepsilon})\right\| \le \delta_1$.

Действительно,

$$\left\|\Gamma_F(\bar{\varepsilon})\right\| \le \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \cdot \int_0^{\mathrm{T}} \left(\left\|\Phi\left(t, \varphi_t, F(t, \varphi_t), \bar{v}\right)\right\| + \left\|\Theta_1(\bar{\varepsilon})\right\|\right) dt.$$

Так как $\lim\limits_{d \to 0} \Phi(t, \varphi, F(t, \varphi), v) = 0$ равномерно по $t, \varphi, v$, то число $d_1$ можно выбрать так, чтобы для любой функции $F(t, \varphi) \in C(d_1)$

$$\left\|\Phi\left(t, \varphi_t, F(t, \varphi_t), v\right)\right\| \le \frac{\delta_1}{2\left\|B^{-1}\right\|}. \tag{1.2}$$

Согласно условию е) $\Theta_1(\bar{\varepsilon})$ удовлетворяет условию Липшица по $\bar{\varepsilon}$, то есть $\left\|\Theta_1(\bar{\varepsilon})\right\| \le \gamma(\delta) \cdot \left\|\bar{\varepsilon}\right\|$, $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Это означает, что $\Theta_1(\bar{\varepsilon}) \to 0$ при $\bar{\varepsilon} \to 0$. Таким образом, число $\delta_1$ можно выбрать так, что для любого $\left\|\bar{\varepsilon}\right\| \le \delta_1$

$$\left\|\Theta_1(\bar{\varepsilon})\right\| \le \frac{\delta_1}{2\left\|B^{-1}\right\|}. \tag{1.3}$$

Учитывая неравенства (1.2) и (1.3), имеем

$$\left\|\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}\right)\right\| \leq \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \cdot \int_0^{\mathrm{T}} \left(\left\|\Phi\left(t, \varphi_t, F\left(t, \varphi_t\right), \bar{v}\right)\right\| + \left\|\Theta_1\left(\bar{\varepsilon}\right)\right\|\right) dt \leq \frac{\left\|\mathrm{B}^{-1}\right\|}{\mathrm{T}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{\delta_1}{2\left\|B^{-1}\right\|} + \frac{\delta_1}{2\left\|B^{-1}\right\|}\right) dt = \delta_1.$$

Следовательно, непрерывный оператор $\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}\right)$ преобразует замкнутое ограниченное и выпуклое множество

$$\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \left\|\bar{\varepsilon}\right\| \leq \delta_1\right\}$$

в себя и является сжимающим.

По теореме Банаха имеем, что существуют числа $d_1 > 0, \delta_1 > 0$ такие, что для каждой функции $F\left(\varphi, t\right) \in C\left(d_1\right)$ во множестве $\left\{\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{n-m} : \left\|\bar{\varepsilon}\right\| \leq \delta_1\right\}$ существует единственная неподвижная точка $\bar{\varepsilon}^F$ оператора $\Gamma_F\left(\bar{\varepsilon}\right)$, являющаяся решением системы (3).

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купцов М.И. К вопросу существования периодических решений у некоторого класса систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения: сб. науч. тр. / РГПУ им. С.А. Есенина. – Рязань, 1996. – С. 76–86.

*Баева О. В. — МКО — 2006, т. 2, стр.21–27*
*Baeva O. V. — MCE — 2006, v. 2, p. 21–27*

# THE EXISTENCE OF NONTRIVIAL PERIODICAL SOLUTIONS OF NONLINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETR.

**Baeva O. V.**

(Russia, Rjazan)

*The article studies a nonlinear non-autonomous finite-dimensional $T$-periodical system of differential equations with a vector parameter $\nu$.*