ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМЫ РОЗЕНЦВЕЙГА–МАКАРТУРА

Зульпукаров М.-Г. М., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В.

(Россия, Москва)

Обсуждается метод локального уменьшения размерности задачи нелинейной динамики – метод русел и джокеров. Приводится пример применения метода русел и джокеров к исследованию сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений, представляющих собой модель Розенцвейга–Макартура для тритрофной пищевой цепи.

Введение. Известно, что аппарат нелинейной динамики при решении задач, связанных с построением предсказывающей модели на основе известной истории поведения объекта, наиболее эффективен в случаях, когда размерность модели невелика [1]. Задачи большой размерности можно решать, используя тот факт, что фазовое пространство динамических систем зачастую неоднородно: состояние системы может быть с приемлемой точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных, составляющих *проекцию малой размерности*. Прочие переменные могут быть подчинены переменным проекции (называемым *параметрами порядка*) и/или несущественны с точки зрения описания системы в рамках задачи.

В общем случае проекции малой размерности могут использоваться в ограниченных областях фазового пространства, причём в разных областях проекции необязательно одинаковы. Такие области было предложено называть *руслами* [1,2].

Области, в которых построение проекции малой размерности с последующим применением методов нелинейной динамики не представляется возможным, именуются *джокерами*. Поведение системы, находящейся в области джокера, отличается сложностью, непредсказуемостью и разнообразием, вследствие чего приходится использовать вероятностные методы и/или простые приближённые правила, определяемые эмпирически либо из общих соображений. Таким образом, решение задачи с помощью русел и джокеров представляет собой комбинацию динамических и статистических методов.

Целью данной работы является анализ поведения *модели Розенцвейга–Макартура* [3] методом русел и джокеров. Исследуемая система представляет собой модификацию модели Вольтерра «хищник-жертва» [4] для случая трёх видов — жертвы, хищника и суперхищника (пожирателя хищников) с учётом следующих факторов: логистического роста жертв, насыщения хищников (увеличение численности жертв, начиная с определённого уровня, не приводит к увеличению их потребления хищниками используется функция Холлинга II типа [5]) и суперхищников, мальтузианского вымирания хищников и суперхищников при отсутствии пищи. Исследуемая система, в числе прочих, демонстрирует режим с наличием хаотического аттрактора шильниковского типа [6]. Хаос такого типа имеет место в случае, когда скорости изменения численности хищников и суперхищников совпадают по порядку величины, а скорость изменения численности жертв велика [7]. Это означает, что рассматриваемая задача является сингулярно возмущённой [8].

Предлагается следующая упрощённая модель исходной системы в виде комбинации русел и джокеров, использующая методы анализа сингулярно возмущённых систем [9]. Строится *вырожденная система*, в которой дифференциальное уравнение для численности жертв заменяется алгебраическим уравнением, определяющим области медленного движения. Алгебраическое уравнение решается относительно численности жертв. Далее, области медленного движения считаются руслами, а линии срыва — джокерами. Таким образом, численность жертв является скрытой переменной: двумерная система «хищник-суперхищник» движется вдоль русла вплоть до момента попадания в область джокера, после чего происходит переключение на другое русло, находящееся в той же области двумерного фазового пространства, но отличающееся законами движения.

Русла и джокеры. Понимание, на основе которого можно принимать решения, дают только простые модели. Идеальный случай — построение простой проекции реальности для всей совокупности решаемых задач. На практике чаще приходится выбирать проекцию для какого-то конкретного вида задач, оговаривая область её применения, — определять русла. Иными словами, вместо единой модели получается ряд моделей для разных ситуаций.

Примерная схема возникновения неоднородностей фазового пространства в виде русел дана в [1]. Предположим, существует область фазового пространства, где исходную функцию, задающую фазовую скорость (или отображение), можно представить в виде суммы какой-либо более простой функции (например, меньшей размерности) и некоторого малого члена. Тогда, пренебрегая малым членом, получают уравнение движения на русле. Конфигурация русла соответственно определяется условием малости отброшенного члена.

Джокер представляет собой правило или алгоритм, определяющий поведение объекта на некотором подмножестве фазового пространства (*области джокера*), в котором неопределённость в поведении объекта резко возрастает. При попадании изображающей точки в область джокера, происходит его *срабатывание* — задействуется соответствующее правило (алгоритм).

В зависимости от специфики рассматриваемой задачи, можно использовать, например, джокеры следующих разновидностей [2, 10]. *Джокер первого рода* (*точечный*) мгновенно переводит систему в определённую точку фазового пространства (например, постепенное развитие экосистемы заканчивается экологической катастрофой). *Джокер второго рода* (*двухточечный*) при срабатывании с вероятностью p_1 переводит систему в некоторую точку фазового пространства A и с вероятностью p_2 — в точку *B*. *Джокер третьего рода* (*непрерывный*) переводит систему в точку некоторой области фазового пространства в соответствии с заданным законом распределения вероятности. *Мерцающий джокер* представляет собой джокер, срабатывающий с некоторой, отличной от 1, вероятностью. То есть при попадании изображающей точки в область джокера, следующий шаг либо (с вероятностью p_1) делается в соответствии с уравнением русла, либо (с вероятностью p_2) в соответствии с правилом джокера.

В [10] на примере логистического отображения рассмотрено влияние различного вида джокеров на поведение системы. В частности, непрерывный джокер может сделать поведение полностью хаотическим. Последовательно уменьшая его область, можно сначала добиться режима, похожего на перемежаемость, а затем — «сбой цикла». Действие мерцающего непрерывного джокера аналогично, но степень хаотичности регулируется изменением вероятности срабатывания. Точечный джокер, наоборот, подавляет хаос. Мерцающий точечный джокер порождает циклические участки, соответствующие действию точечного джокера, вперемешку с участками, соответствующими невозмущённому движению. Результатом действия двухточечного джокера является стохастическое чередование различных циклических участков.

Пример исследования методом русел и джокеров. Рассмотрим пример применения метода русел и джокеров к исследованию модели Розенцвейга–Макартура.

Модель, в её безразмерном виде, представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \zeta \dot{x} = x\left(1 - x - \dfrac{y}{\beta_1 + x}\right) \equiv xf(x, y) \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \dfrac{z}{\beta_2 + y}\right) \equiv yg(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon z\left(\dfrac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2\right) \equiv \varepsilon zh(y) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x, y, z — численности популяций (жертв, хищников и суперхищников соответственно), а ζ, ε, β_1, β_2, δ_1, δ_2 — параметры.

В зависимости от значений параметров система (1) может демонстрировать большое разнообразие динамических режимов, в число которых входят хаотические режимы различных типов. Будем рассматривать систему при следующих значениях параметров: $\zeta = 0{,}05$, $\varepsilon=1$, $\beta_1=0{,}25$, $\beta_2=0{,}1$, $\delta_1=0{,}2$, $\delta_2=0{,}39$ [7]. Данное соотношение параметров имеет место, когда скорости размножения хищников и суперхищников сравнимы, а скорость размножения жертв велика. Динамический режим, соответствующий указанному набору значений параметров, носит название *шильниковского хаоса* [6].

В этих условиях, в силу малости параметра ζ, система (1) является сингулярно возмущённой, и на аттракторе чётко выделяются четыре чередующиеся зоны медленного и быстрого движения.

Согласно теореме Тихонова [8,9], медленное движение может быть приближённо описано *вырожденной системой* дифференциальных и алгебраических уравнений, представляющей собой исходную систему (1), в которой выполнен предельный переход при $\zeta \to 0$:

$$\begin{cases} 0 = xf(x, y) \\ \dot{y} = yg(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon zh(y) \end{cases} \cdot \qquad (2)$$

Предлагается исключить из данной системы переменную x и заменить области медленного движения руслами (динамика на руслах определяется вырожденной системой), а области быстрого движения — джокерами. Тогда вместо сложной системы мы получим одну или более относительно простую систему, снабжённую одним или более простым джокером, ответственным за проявления сложности исходной системы.

Итак, система (2) имеет две области медленной динамики. Первая область, Γ_0, находится на плоскости $x = 0$. Медленное движение фазовой точки системы (2) в пределах Γ_0, таким образом, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \dot{y} = y\left(-\delta_1 - \dfrac{z}{\beta_2 + y}\right) = yg\left(0, y, z\right) \\ \dot{z} = \varepsilon z\left(\dfrac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2\right) = \varepsilon zh\left(y\right) \end{cases}. \tag{3}$$

Вторая область, Γ_1, образована точками цилиндрической параболы

$$y = f^{-1}\left(x, \_\right) = \left(1 - x\right)\left(\beta_1 + x\right),$$

для которых выполняется неравенство

$$x > \bar{x} \equiv \frac{\left(1 - \beta_1\right)}{2},\ y < \bar{y} \equiv \frac{\left(1 + \beta_1\right)^2}{4}.$$

Для описания медленного движения фазовой точки системы (2) в пределах Γ_1, можно использовать следующую двумерную систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = y\left(\dfrac{f_+^{-1}\left(\_, y\right)}{\beta_1 + f_+^{-1}\left(\_, y\right)} - \delta_1 - \dfrac{z}{\beta_2 + y}\right) = yg\left(f_+^{-1}\left(\_, y\right), y, z\right) \\ \dot{z} = \varepsilon z\left(\dfrac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2\right) = \varepsilon zh\left(y\right) \end{cases}, \tag{4}$$

где

$$f_+^{-1}\left(\_, y\right) \equiv +\sqrt{\bar{y} - y} + \bar{x},\ y \le \bar{y}, \tag{5}$$

— то из двух решений уравнения $f\left(x, y\right) = 0$ относительно x, что соответствует Γ_1.

Перемещению фазовой точки системы (2) из одной области медленного движения в другую должно соответствовать переключение между системами (4) и (3). Переключение выполняется джокерами $\mathbf{J}_0$ (соответствует перемещению фазовой точки системы (2) из области Γ_0 в область Γ_1) и $\mathbf{J}_1$ (соответствует обратному перемещению). Область джокера $\mathbf{J}_1$ соответствует линии срыва — прямой $y = \bar{y}$. Линия срыва, соответствующая $\mathbf{J}_0$, имеет более сложный вид. Предлагается аппроксимировать её вертикальной прямой, проходящей через точку фокуса (последнее необходимо для наличия шильниковского хаоса).

Таким образом, можно представить, что джокеры $\mathbf{J}_0$ и $\mathbf{J}_1$ «сшивают» фазовые пространства двух различных систем. В этом заключается их принципиальное отличие от рассмотренных ранее джокеров, действие которых заключается в перемещении в пределах одного фазового пространства. С учётом особенностей срабатывания и конфигурации, новому джокеру можно присвоить название *джокер типа «шов»*.

Фазовые траектории полученной системы (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$ показаны на рис. 1.

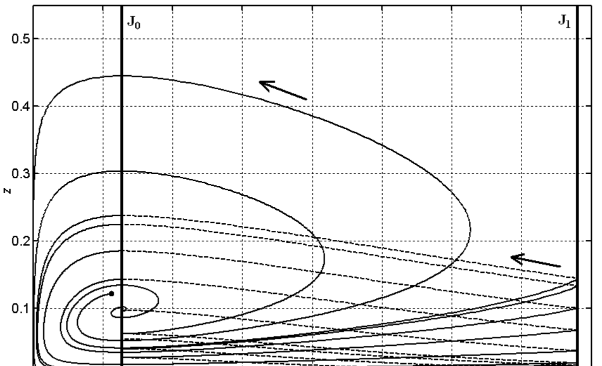

Рис. 1. Система с джокерами. Фазовые траектории системы (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$ (используется джокер $\mathbf{J}_0$ с упрощённой конфигурацией в виде прямой). Джокеры показаны жирными линиями. Сплошными линиями обозначены траектории системы (4), пунктирными — системы (3). Стрелками показано направление движения, кружком — начальная точка. В окрестности области джокера $\mathbf{J}_1$ хорошо заметно нарушение гладкости траектории.

Сравним исходную систему и систему (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$ по следующим характеристикам: значения ляпуновских характеристических показателей, значения первых нулей функций автокорреляции переменных y и z, корреляционные интегралы.

Значения ляпуновских характеристических показателей исходной системы, определённые экспериментально с помощью варианта алгоритма Бенеттина [1] для дифференциальных уравнений, составляют $\lambda_1 = 0,04$, $\lambda_2 = 10^{-4}$, $\lambda_3 = -13,6$. Проблема применения данного алгоритма к системе (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$ заключается в том, что в области джокера фазовые траектории не являются гладкими и матрица Якоби (а следовательно, и линеаризованная система) не определена.

Для решения проблемы можно, например, использовать модификацию варианта алгоритма Бенеттина для отображений (шаг отображения представляет собой интегрирование системы в течение некоторого фиксированного времени Δt). В этой модификации вместо итераций линеаризованной системы для возмущений относительно начала координат, где возмущения ортонормированы, выполняются итерации исходной системы для возмущений относительно начальных данных, где возмущения ортогонализованы, малы и одинаковы по модулю. Вблизи области джокера ортогонализация возмущений не выполняется (соответственно не вычисляется текущая оценка показателей), то есть для начальных данных и возмущений выполняется несколько итераций отображения подряд. Последнее правило обусловлено тем, что в области джокера траектории системы не являются гладкими и ортогонализация возмущений приводит к значительным погрешностям.

Значения ляпуновских характеристических показателей системы (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$, определённые данным методом, составляют $\lambda_1 = 0,095$ и $\lambda_2 = 0,015$. Для сравнения: тот же алгоритм, применённый к проекции исходной системы на плоскость $x = 0$, даёт значения $\lambda_1 = 0,09$ и $\lambda_2 = 0,02$.

Здесь имеет смысл отметить, что для систем, включающих джокеры ранее описанных типов, определение ляпуновских характеристических показателей затруднено или невозможно. Действительно, две сколь угодно близкие траектории, пройдя область джокера, например, третьего рода, могут, следуя вероятностному правилу, мгновенно разойтись на сравнительно большое расстояние. Обратный пример: две различные траектории, проходя джокер первого рода, объединяются в одну. Таким образом, при использовании стандартных методов, оценка показателя в первом случае стремится к $+\infty$, а во втором — обращается в ноль. Следовательно, необходимо доопределение понятия ляпуновского характеристического показателя для систем с джокером. Возможно, также потребуется интегрировать систему в течение очень долгого времени (достаточно долгого, чтобы фазовая точка прошла область джокера столько раз, сколько необходимо для сбора статистики), что может быть весьма затратно.

Джокер типа «шов», в отличие от предыдущих, сохраняет единственность решения и его непрерывность по начальным данным, что даёт возможность использовать общепринятое определение ляпуновского характеристического показателя и позволяет избежать чрезмерных затрат вычислительных ресурсов.

Для переменных y и z в исходной системе и в системе с джокерами были вычислены значения первых нулей функций автокорреляции. Для переменной y последние составляют $\Delta t = 5,00$ для исходной системы и $\Delta t = 4,48$ для системы (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$. Для переменной z значения первых нулей функций автокорреляции составляют $\Delta t = 7,16$ для исходной системы и $\Delta t = 6,95$ для системы (3)–$\mathbf{J}_0$–(4)–$\mathbf{J}_1$.

Корреляционный показатель ν рассчитывался для исходной системы по 10000 некоррелированных точек и составил $\nu = 1,69$, а для упрощённой системы — по 4000 точек и составил $\nu = 1,4$.

Заключение. Итак, на основе сингулярно возмущённой системы нелинейных дифференциальных уравнений можно построить упрощённую систему пониженной размерности — систему русел и джокеров. Целесообразна замена джокерами участков поведения, необъяснимого простой моделью (причиной чего может быть проявление воздействия скрытых или подчинённых переменных). В рассмотренном случае предлагается выбор участков медленного движения в качестве русел, а участков быстрого движения — в качестве джокеров.

Показано, что при понижении размерности системы для воспроизведения эффекта действия скрытой переменной (как правило, имеющей место в случаях, когда моделируемая система плохо формализуема или часть её показателей недоступна для измерения) можно использовать джокер нового типа — «шов», при срабатывании не перемещающий (или не только перемещающий) фазовую точку, но меняющий закон её движения. Важной особенностью джокеров типа «шов» является то, что для системы с джокером данного типа могут быть использованы стандартные (возможно, с небольшими изменениями) методы определения количественных характеристик хаоса (в частности, ляпуновских характеристических показателей).

Сравнение исходной системы с упрощённой системой, построенной описанным выше образом, по ряду количественных характеристик хаоса, показывает значительное сходство поведения систем. Предложенный метод представляется пригодным для построения упрощённой предсказывающей модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: УРСС, 2002.
2. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Джокеры, русла или поиски третьей парадигмы // Знание — сила. – 1998. – № 3.
3. Deng B. Food chain chaos due to junction-fold point // Chaos. September 2001. Vol. 11, № 3.
4. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

5. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985.
6. Кузнецов С.П. Динамический хаос. — М.: Физматгиз, 2001.
7. Deng B., Hines G. Food chain chaos due to Shilnikov's orbit // Chaos. 2002. Vol. 12, № 3.
8. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Избранные труды А.Н. Тихонова. — М.: МАКС Пресс, 2001.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
10. Белайчук Л.В., Малинецкий Г.Г. Проделки джокеров на одномерных отображениях // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 1997. Препринт № 24.

THE CHANNELS AND JOKERS METHOD APPLICATION TO THE ROSENZWEIG–MACARTHUR SYSTEM ANALYSIS

Zulpukarov M.-G. M., Malinetskii G. G., Podlazov A. V.

(Russia, Moscow)

The channels and jokers method, the one for local reduction of a nonlinear problem rank, is discussed. An example of the channels and jokers method application to the analysis of the singularly perturbed case of the Rosenzweig–Macarthur model of a tritrophic food chain, is shown.