СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЕДИНИЧНОМ СИМПЛЕКСЕ

Кузенков О. А., Капитанов Д. В.

(Россия, Нижний Новгород)

В настоящей работе рассматриваются системы разностных уравнений на единичном симплексе. Получен критерий инвариантности последнего относительно разностного преобразования, а также рассмотрены проблемы представления и разрешимости. Выведены необходимые и достаточные условия, при которых система разностных уравнений на единичном симплексе является системой отбора.

Инвариантность положительного октанта. Целью настоящей работы является исследование систем вида

$$\Delta x_i = F_i(x)\Delta t \tag{1}$$

при выполнении условий

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь и далее под x понимается n-мерный вектор

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а $\Delta x_i = x_{i,k+1} - x_{i,k}$.

Определение 1. *Будем говорить, что положительный октант (2) инвариантен относительно разностного преобразования (1), если точки октанта (2) под действием преобразования (1) переходят в точки этого же октанта.*

Далее будем предполагать, что функции $F_i(x)$ являются липшицевыми [1].

Теорема 1. *Для того чтобы положительный октант* (2) *был инвариантным относительно преобразования* (1), *необходимо, чтобы выполнялось неравенство:*

$$\frac{F_i(x)}{x_i}\Delta t \geq -1; \quad x_i \neq 0. \tag{3}$$

Доказательство. Из условия инвариантности октанта (2) следует, что при $x_i(t_0) \geq 0$ будет выполняться неравенство: $x_i(t_0 + \Delta t) \geq 0$; следовательно, имеет место следующее неравенство:

$$x_i(t_0 + \Delta t) - x_i(t_0) + x_i(t_0) \geq 0,$$

откуда следует, что $(\Delta x_i / x_i) \geq -1$, а это есть не что иное, как условие (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы положительный октант (2) был инвариантным относительно преобразования (1) необходимо, чтобы функции $F_i(x)$ были квазиположительными.*

Доказательство. Устремляя x_i к нулю в неравенстве $F_i(x)\Delta t \geq -x_i$ и учитывая неотрицательность Δt, получим, что функции $F_i(x)$ являются квазиположительными. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы положительный октант* (2) *был инвариантным относительно преобразования* (1), *достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (3).

Доказательство. В предположении, что $x(t) > 0$, покажем, что $x_i(t_0 + \Delta t) \geq 0$. Действительно,

$$x_i(t_0 + \Delta t) = x_i(t_0) + \Delta x_i = x_i(t_0) \cdot (1 + (F_i(x) \cdot \Delta t) / x_i);$$

но тогда в силу (3) справедливо неравенство $x_i(t_0 + \Delta t) \geq 0$. Пусть теперь $x_i = 0$. Тогда в силу теоремы 2 функции $F_i(x)$ являются квазиположительными, т.е.

$$F_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)\Delta t \geq 0,$$

следовательно, $\Delta x_i \ge 0$ и $x_i(t_0 + \Delta t) \ge 0$. Таким образом, и в этом случае точка положительного октанта переходит в точку этого же октанта. Теорема доказана.

Критерий инвариантности симплекса. Во многих моделях встречаются системы разностных уравнений, в которых в течение всего процесса сохраняется постоянной сумма значений фазовых переменных:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = const. \tag{4}$$

В химии условие (4) выражает закон Ломоносова–Лавуазье сохранения вещества, в экологии — сохранение емкости среды обитания и т.д. Вводя нормирующий коэффициент, исследование системы (1),(2) при условии (4) всегда можно свести к исследованию системы (1),(2) при условии

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{5}$$

Ее фазовым пространством является $(n-1)$-мерный единичный симплекс S_{n-1}, определяемый фазовыми ограничениями (2),(5). В дальнейшем систему (1),(2),(5) будем называть системой на симплексе [2,3,4].

Определение 2. *Будем говорить, что единичный симплекс* S_{n-1} *инвариантен относительно разностного преобразования* (1), *если его точки под действием* (1) *перейдут в точки этого же симплекса.*

Теорема 4. *Пусть для системы* (1) *справедливы условия сохранения положительности решения* (3), *тогда, для того чтобы решения системы* (1),(2), *удовлетворяющие условию* (5) *в начальный момент времени, удовлетворяли бы этому условию во все последующие моменты времени, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x) = 0, \ \textit{при} \ \ x \in S_{n-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Для любых двух точек на симплексе S_{n-1} справедливо (5), поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t_0 + \Delta t) = 1; \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Тогда, вычитая из первой суммы вторую, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0, \tag{7}$$

откуда с учетом (1) следует (6).
Достаточность. С учетом (1) условие (6) эквивалентно равенству (7). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i(t+\Delta t) - x_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t+\Delta t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, если точка x в момент времени t принадлежала симплексу S_{n-1}, то есть выполнялось условие (5), то в силу (8) в момент времени $t + \Delta t$ будет справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t + \Delta t) = 1,$$

то есть точка $x(t + \Delta t)$ тоже будет принадлежать симплексу S_{n-1}.
Теорема доказана.

Теоремы о представлении.

Лемма 1. *Для любой функции* $F_i(x)$ $i = \overline{1,n}$ *на симплексе* S_{n-1} *можно подобрать функцию* $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, *определённую на положительном октанте* (2), *которая положительно однородна и совпадает с* $F_i(x)$ *на симплексе* S_{n-1}. *При этом если* $F_i(x)$ *неотрицательны на симплексе, то* $\Phi_i(x)$ *неотрицательны на октанте.*

Доказательство. Обозначим $\Phi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j F_i(x / \sum_{j=1}^{n} x_j)$. На основании условия (5) для любых $x \in S_{n-1}$ будут справедливы равенства $F_i(x) = 1 \cdot F_i(\frac{x}{1}) = \Phi_i(x)$. Для любого действительного числа α справедливы следующие соотношения:

$$\Phi_i(\alpha x) = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j F_i((\alpha \cdot x)/(\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j)) = \alpha \cdot \Phi_i(x),$$

что и доказывает однородность функций $\Phi_i(x)$. Так как функции $F(x)$ неотрицательны на симплексе и в точках последнего совпадают с $\Phi_i(x)$, то в силу положительной однородности на всём октанте (2) функций $\Phi_i(x)$, убеждаемся в неотрицательности $\Phi_i(x)$ на октанте (2). Лемма доказана.

Теорема 5. *Любую систему (1) на симплексе (2),(5) можно представить в виде:*

$$\Delta x_i = (\Phi_i(x) - x_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x))\Delta t, \qquad (9)$$

где функции $\Phi_i(x)$ — положительно однородные и неотрицательные.

Доказательство. Рассмотрим систему (1). Так как она является системой на симплексе, то в силу теоремы 4 для нее справедливы условия сохранения положительности решений (3). Эти условия можно переписать в виде: $(F_i(x)/x_i) \geq -1/\Delta t$, откуда вытекает ограниченность снизу отношений: $F_i(x)/x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Выберем произвольную непрерывную функцию $M(x) \leq \min_{x \in S_{n-1}} ((F_i(x))/x_i)$, $i = \overline{1,n}$. Положим $\widetilde{\Phi_i}(x) \equiv F_i(x) - x_i \cdot M$, $i = \overline{1,n}$, тогда $\widetilde{\Phi_i}(x) \geq 0$. В силу свойств (5),(6) будут выполнены равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) - M \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = -M.$$

Тогда $\dfrac{\Delta x_i}{\Delta t} = F_i(x) = F_i(x) - x_i M + x_i M = \widetilde{\Phi_i}(x) - x_i \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi_i}(x)$. В силу леммы 1 для функций $\widetilde{\Phi_i}(x)$ существуют положительно однородные функции $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, такие, что $\widetilde{\Phi_i}(x) = \Phi_i(x)$ на симплексе S_{n-1}, где $i = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Любую систему* (1) *на симплексе* (2),(5) *можно представить в виде:*

$$\Delta x_i = \frac{\Phi_i(x) - x_i \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(x) \cdot \Delta t + 1} \Delta t, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

где функции $\Phi_i(x)$ *— положительно однородные.*

Доказательство. Так как система (10) является системой на симплексе, то в силу леммы 1 существуют функции $\Phi_i(x)$, которые являются положительно однородными, и $\Phi_i(x) = F_i(x)$, тогда в силу (6) во всех точках симплекса имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \Phi_j(x) \cdot \Delta t = 0$, откуда следует справедливость преобразований

$$\Delta x_i = F_i(x) \cdot \Delta t = \frac{\Phi_i(x) \cdot \Delta t - x_i \cdot 0}{x_i \cdot 0 + 1} = \frac{\Phi_i(x) - x_i \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(x) \cdot \Delta t + 1} \Delta t.$$

Теорема доказана.

Теорема о разрешимости.

Теорема 7. *Пусть дана система (10). Наряду с этой системой рассмотрим систему*

$$\Delta y_i = \Phi_i(y)\Delta t;\ i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

с теми же начальными условиями $y(0) = x(0) = x_0$. *Тогда решения систем* (10) *и* (11) *связаны соотношением*

$$x_i = {y_i} \Big/ {\sum_{j=1}^{n} y_j}. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим систему (10), где все функции $\Phi_i(x)$ положительно однородные. Пусть x_i определяются формулой (12), где y_i — решения системы (11). Тогда имеют место равенства

$$\Delta x_i = \frac{y_i(t+\Delta t)}{\sum_{j=1}^{n} y_j(t+\Delta t)} - x_i = \frac{\Delta y_i + y_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}(\Delta y_j + y_j(t))} - x_i =$$

$$= \frac{\Phi_i(y)\Delta t + y_i(t)}{\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(y)\Delta t + \sum_{j=1}^{n} y_j(t)} - x_i.$$

Используя однородность функций $\Phi_i(y)$, получим:

$$\Delta x_i = \frac{\Phi_i(y/\sum_{j=1}^{n} y_j)\Delta t + (y_i/\sum_{j=1}^{n} y_j)}{\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(y/\sum_{j=1}^{n} y_j)\Delta t + 1} - x_i = \frac{\Phi_i(x)\Delta t + x_i}{\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(x)\Delta t + 1} - x_i.$$

Приведя полученные выражения к общему знаменателю, получим равенство (10). Следовательно, величины x_i удовлетворяют системе (10). Теорема доказана.

Системы отбора.

Определение 3. *Систему* (1),(2) *при условии* (5) *будем называть системой отбора, если найдется такой номер* i, *что независимо от начальных условий* $x_i(0) \neq 0$ *выполняются условия:*

$$x_i(t_0 + n \cdot \Delta t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1; \;\; x_j(t_0 + n \cdot \Delta t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \;\; i \neq j. \qquad (13)$$

Не умаляя общности, можно считать, что $i = 1,$ в противном случае достаточно переобозначить переменные. Целью дальнейшего исследования является вывод достаточных условий для системы (1),(2) при условии (5), при которых она становится системой отбора.

Теорема 8. *Для того чтобы система* (1),(2) *при условии* (5) *являлась системой отбора, достаточно, чтобы неравенство* $F_1(x) > 0$ *выполнялось на симплексе* S_{n-1}, *за исключением точек, удовлетворяющих условиям* $x_1 = 0$ *или* $x_1 = 1$.

Доказательство. При произвольных начальных условиях $x_1(0) = x_{10} > 0$ последовательность $x_1(t_0 + n\Delta t)$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_1(t_0 + n\Delta t) = \alpha$. Если $0 < \alpha < 1$, то справедливы следующие неравенства: $x_{10} \leq x_1(t_0 + n\Delta t) \leq \alpha < 1$. В силу компактности множества $S = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1; 0 < x_{10} \leq x_1 \leq \alpha_1\}$ непрерывная функция $F_1(x)$ по теореме Вейерштрасса [5] достигает на нём своей точной нижней грани γ. Так как во всех точках множества S справедливо неравенство $F_1(x) > 0$, то $\gamma = \inf\limits_S F_1(x) > 0$, тогда

$$x_1(t_0 + (n+1)\Delta t) = x_1(t_0 + n\Delta t) + F_1(x)\Delta t \geq x_1(t_0 + n\Delta t) + \gamma\Delta t \;.$$

Отсюда $x_1(t_0+n\Delta t)\geq n\gamma\Delta t$. Так как $n\gamma\Delta t \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, то $x_1(t_0+n\Delta t) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Следовательно, $\alpha=1$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Для того чтобы система (9) при условии (5) являлась системой отбора, достаточно, чтобы выполнялось неравенство:*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \left(\sum_{k=2}^{n}\Phi_k(x)\right)\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}x_k\right)^{-1} \tag{14}$$

на симплексе S_{n-1}, за исключением точек, удовлетворяющих условиям $x_1=0$ или $x_1=1$.

Доказательство. В силу неравенства (14) и условия (5) имеет место неравенство $\Phi_1(x)\cdot(1-x_1) > x_1\sum_{k=2}^{n}\Phi_k(x)$ или, что то же самое, $\Delta x_1 = (\Phi_1(x) - x_1\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x))\Delta t > 0$. В силу теоремы 8 система (9) при условии (5) является системой отбора. Теорема доказана.

Теорема 10. *Для того чтобы система (9) при условии (5) являлась системой отбора, достаточно, чтобы неравенство*

$$\frac{\Phi_1(x)}{x_1} > \frac{\Phi_i(x)}{x_i};\quad i=\overline{2,n}, \tag{15}$$

выполнялось на симплексе S_{n-1}, за исключением точек $x_1=0$ и $x_i=0$.

Доказательство. Выберем x_1 таким образом, что $\alpha\leq x_1\leq\beta$, где $\alpha>0$, а $\beta<1$. В силу компактности симплекса S_{n-1} и непрерывности функции $\Phi_1(x)$ на этом симплексе имеет место следующее неравенство: $\frac{\Phi_1(x)}{x_1}\leq C$, где $C=const$. Из неравенств (15) при $x_i \neq 0$ следует, что $\dfrac{\Phi_i(x)}{x_i} \leq C$, причём функции $\Phi_i(x)$ непрерывны на S_{n-1}. При $x_i \underset{n\to\infty}{\to} 0$ в силу ограниченности сверху отношений $\dfrac{\Phi_i(x)}{x_i}$ заключаем, что $\Phi_i(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) = 0.$

Если для $x \in S_{n-1}$ все $x_i > 0,\ \ i = \overline{2,n}$, то, суммируя по $i = \overline{1,n}$ обе части неравенства (15), получим

$$\Phi_1(x) - x_1 \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) > 0.$$

Следовательно, в этой точке $F_1(x) > 0$. Если существуют компоненты $x_j > 0,$ и $x_i = 0,$ то найдутся две группы индексов J_1 и J_2, для которых $j \in J_1$ и $i \in J_2$. Просуммировав обе части неравенства (15) по всем $j \in J_1$, получим:

$$\Phi_1(x) \sum_{j \in J_1} x_j > x_1 \sum_{j \in J_1} \Phi_j(x). \tag{16}$$

При $x_i = 0,$ где $i = \overline{2,n}$, справедливо следующее равенство: $x_i \Phi_1(x) = x_1 \Phi_i(x),\ \ i \in J_2$. Просуммируем последнее равенство по всем $i \in J_2$:

$$\Phi_1(x) \sum_{i \in J_2} x_i = x_1 \sum_{i \in J_2} \Phi_i(x). \tag{17}$$

Складывая неравенство (16) и равенство (17), получим: $\Phi_1(x) - x_1 \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x) > 0,$ следовательно, в силу теоремы 8 система (9) при условии (5) является системой отбора. Теорема доказана.

Условие (15) допускает естественную интерпретацию. Если $\Phi_i(x)$ — это совокупный нелимитированный доход i-го предприятия, а x_i — его капитал, то $\Phi_i(x)/x_i$ — прибыль на единицу вложенных средств. Очевидно, что в конкурентной борьбе будет побеждать то предприятие, у которого прибыль в отсутствие конкурентов выше, что и отражено в условии (15). На интуитивном уровне это очевидно, но это всего лишь достаточные условия. Полученные условия содержат очень сильные требования, поэтому выполняются они редко и в достаточно очевидных ситуациях. Были выведены [3,4] другие (не нашедшие места в этой статье) условия отбора при более слабых предположениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.:Наука, 1970.
2. Кузенков О. А. Математические модели процессов отбора // Математическое моделирование и оптимальное управление. Сб. научн. тр. под ред. Р.Г. Стронгина. — Н.Новгород. 1994. — С.120–131.
3. Кузенков О. А., Капитанов Д. В. Разностные уравнения на единичном симплексе // Тезисы X-й Международной конференции «Нелинейный Мир». — Н. Новгород: изд-во ННГУ, 2005. — Вып.10. — С. 78.
4. Кузенков О. А., Капитанов Д. В. Разностные уравнения на единичном симплексе // Тезисы VII-ой Всероссийской конференции «Нелинейные Колебания Механических Систем». — Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2005. — С. 124–126.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.:ОГИЗ, 1949.

THE SYSTEMS DIFFERENC EQUATIONS ON AN INDIVIDUAL SIMPLEX

Kuzenkov O. A., Kapitanov D. V.

(Russia, Nizhniy Novgorod)

In the given work systems of differenc equations on individual simplex are considered. The criterion of invariance individual simplex with regard to differenc transformations along side with problems of representation and resolvability are studied. Necessary and sufficient conditions making the system of differenc equations on a individual simplex a system of selection are worked out.