

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ S-СПЛАЙНА

Силаев Д. А., Коротчаев Д. О.

(Россия, Москва)

Данная работа посвящена применению теории S-сплайнов для решения уравнений в частных производных на примере уравнения Пуассона. S-сплайн – кусочно-полиномиальная функция, коэффициенты полиномов которой определяются из двух условий: первая часть коэффициентов определяется условиями гладкой склейки, остальные определяются методом наименьших квадратов. В зависимости от порядка рассматриваемых полиномов и соотношения между количеством условий первого и второго типа мы получаем S-сплайны с разными свойствами. На настоящий момент изучены сплайны 3-й степени класса C^1 и сплайны 5-й степени класса C^2 (т.е. на них накладывались условия гладкой склейки вплоть до первой и второй производной соответственно). Мы рассмотрим, каким образом могут быть применены сплайны 3-й степени класса C^1 при решении уравнения Пуассона на круге и в других областях. Для начала нам потребуется определение одномерного и двумерного S-сплайна. Также мы приведем формулировки теорем о единственности и сходимости S-сплайнов.

1. Одномерный S-сплайн

1.1. Определение одномерного S-сплайна

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, h — шаг сетки. Рассмотрим на $[a, b]$ еще одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh, m \in \mathbb{Z}$.

Пусть $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$ и $y'_0 \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$P^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=2}^n a_j x^j \right\}$$

множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами a_0, a_1 . Рассмотрим функционал:

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^M (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2.$$

В классе P^n ищется такой полином, который минимизирует Φ^l и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$a_0^0 = y_0, a_1^0 = y'_0 \quad (1.1)$$

и условиям гладкой склейки двух последовательных полиномов

$$a_l^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g'_{l-1}(H). \quad (1.2)$$

Определение 1. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}^n(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.

Определение 2. Периодическим S-сплайном называется S-сплайн, являющийся периодической функцией на отрезке $[a, b]$.

Предположение периодичности означает замену начальных условий (1.1) на следующие условия периодичности:

$$a_0^0 = g_{L-1}(H), a_1^0 = g'_{L-1}(H). \quad (1.3)$$

Здесь L – число полиномов, составляющих сплайн.

1.2. Построение системы линейных уравнений

Условия минимизации функционала $\Phi^l(u)$ дадут нам следующие уравнения:

$$\begin{cases} S_2 a_0^l + S_3 a_1^l h + S_4 a_2^l h^2 + S_5 a_3^l h^3 = P_1^l; \\ S_3 a_0^l + S_4 a_1^l h + S_5 a_2^l h^2 + S_6 a_3^l h^3 = P_2^l, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$S_j = \sum_{k=0}^M k^j, P_j^l = \sum_{k=0}^M y_{ml+k} k^{j+1}. \quad (1.5)$$

Произведем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0, 1, 2, 3$. При этом уравнения (1.2) и (1.4) преобразуются в следующие:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m \tilde{a}_1^{l-1} + m^2 \tilde{a}_2^{l-1} + m^3 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_0^l; \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m \tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} S_2 \tilde{a}_0^l + S_3 \tilde{a}_1^l + S_4 \tilde{a}_2^l + S_5 \tilde{a}_3^l = P_1^l; \\ S_3 \tilde{a}_0^l + S_4 \tilde{a}_1^l + S_5 \tilde{a}_2^l + S_6 \tilde{a}_3^l = P_2^l. \end{cases} \quad (1.7)$$

Обозначим матрицы:

$$A_1 = \begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ S_3 & S_4 \end{vmatrix}, A_2 = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 \\ S_5 & S_6 \end{vmatrix}, B_1 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} m^2 & m^3 \\ 2m & 3m^2 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, пусть

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \end{pmatrix} \text{ и } X^{2l} = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \end{pmatrix}, X^{2l+1} = \begin{pmatrix} a_2^l \\ a_3^l \end{pmatrix}, \text{ где } l = 0, 1, \dots, L-1.$$

Тогда систему уравнений для определения коэффициентов периодического сплайна можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 & \dots & B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & -E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P^0 \\ 0 \\ P^1 \\ 0 \\ \vdots \\ P^{L-1} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Размерность этой системы — $4L \times 4L$. Здесь E , как обычно, — единичная матрица: $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Для неперiodического сплайна

первые две строки заменяются на стартовые условия (1.1).

Введем обозначение ¹:

$$U = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{A} m^2 T_{35} - \frac{1}{A} m^3 T_{34} & m + \frac{1}{A} m^2 T_{45} - \frac{1}{A} m^3 T_{34} \\ 2 \frac{m}{A} T_{35} - 3 \frac{m^2}{A} T_{34} & 1 + 2 \frac{m}{A} T_{45} - 3 \frac{m^2}{A} T_{44} \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$A = \det(A_2) = \det \begin{vmatrix} S_4 & S_5 \\ S_5 & S_6 \end{vmatrix} = S_4 S_6 - S_5^2 > 0, \quad (1.10)$$

$$T_{ij} = S_i S_j - S_{i-1} S_{j+1}. \quad (1.11)$$

Если сделать некоторые преобразования, то система (1.8) распадается на систему размерности $2L \times 2L$:

¹Матрицу U назовем матрицей устойчивости, поскольку, как мы увидим далее, она определяет устойчивость сплайна

$$\begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & \cdots & U \\ U & -E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U & -E & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^2 \\ X^4 \\ \vdots \\ X^{2L-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_2 A_2^{-1} P^{L-1} \\ -B_2 A_2^{-1} P^0 \\ -B_2 A_2^{-1} P^1 \\ \vdots \\ -B_2 A_2^{-1} P^{L-2} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

из которой находятся первый и второй коэффициенты полиномов. Остальные два коэффициента определяются из метода наименьших квадратов (1.4). Заметим, что матрица U , определенная нами выше, может быть также записана в виде $U = B_1 - B_2 A_2^{-1} A_1$.

1.3. Существование и единственность S-сплайнов

Теорема 1. При любых начальных условиях и для любых констант m и M существует и единственен непериодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.

Теорема 2. Пусть числа m и M таковы, что собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы. Тогда существует и единственен периодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.

1.4. Сходимость S-сплайнов

Теорема 3. Пусть $f(x) \in C^4[a, b]$ — периодическая функция и пусть выполнены предположения:

$$|f(x_k) - f_k| \leq Ch^{4+\varepsilon}, \quad (1.13)$$

где константа C не зависит от h . Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U (1.9) по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн $S_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке $\xi_l = a + lH$ имеет дефект два (т.е. $S_{m,M}^3(x) \in C^1[a, b]$), и для $x \in [a, b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(p)}(x) - S_{m,M}^{(p)}(x) \right| \leq C_p h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (1.14)$$

Теорема 4. Пусть $f(x) \in C^4[a, b]$, и пусть выполнены предположения:

$$|f(x_k) - f_k| \leq Ch^{4+\varepsilon}, \quad |f'(0) - f'_0| \leq Ch^{3+\varepsilon}, \quad (1.15)$$

где константа C не зависит от h . Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U (1.9) по модулю меньше единицы. Тогда непериодический сплайн $S_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке $\xi_l = a + lH$ имеет дефект два (т.е. $S_{m,M}^3(x) \in C^1[a, b]$) и для $x \in [a, b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(p)}(x) - S_{m,M}^{(p)}(x) \right| \leq C_p h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (1.16)$$

Замечание. Как показано в работе [1], выполнение условия $m \leq M\zeta_*$, где $\zeta_* \approx 0.93$, обеспечивает устойчивость, собственные числа матрицы U оказываются по модулю меньше единицы.

1.5. Фундаментальный S-сплайн

Фундаментальный S-сплайн $B_j(x)$ — это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$ и $y'_0 \in \mathbf{R}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij}, i = 0, \dots, K\}$.

Легко видеть, что линейная комбинация $\sum_{j=0}^K y_j B_j(x) = S(x)$ является S-сплайном, приближающим начальные данные $\{y_i, i = 0, \dots, K\}$.

Приведем графики фундаментальных S-сплайнов для периодического случая:

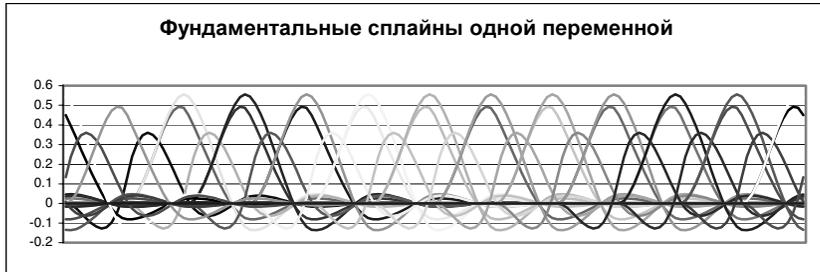


Рис. 1.

2. S-сплайн на круге

2.1. Построение $\varphi-r$ -сплайна

Будем рассматривать на единичном круге полярные сетки :

$$\{\varphi_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, K_1\}, \{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\},$$

$$H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi,$$

$$\{r_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, K_2\}, \{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\},$$

$$H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2, K_2 h_2 = 1.$$

Будем строить аппроксимацию функции $f(\varphi, r)$ на круге при условии, что функция f имеет 4 производных по переменным r и φ , то есть:

$$f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]. \quad (2.1)$$

Пусть $\{y_{ij} = f(\varphi_i, r_j), \quad i = 0, \dots, K_1, \quad j = 0, \dots, K_2\}$ — значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. При каждом $j = 1, \dots, K_2$ построим периодический S-сплайн $S_j(\varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ по начальным данным $\{y_{ij}, \quad i = 0, \dots, K_1\}$. Каждый из этих сплайнов аппроксимирует

функцию $f(\varphi, r_j)$ на окружности с радиусом r_j , причем в силу теоремы о сходимости

$$\left| S_j^{(p)}(\varphi) - \frac{\partial^p f(\varphi, r_j)}{\partial \varphi^p} \right| < Ch_1^{4-p}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

Далее, фиксируем произвольное $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi]$. Рассмотрим набор $\{z_j = S_j(\tilde{\varphi}), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$. Также обозначим z'_0 — значение, получаемое по некоторому алгоритму по набору $\{z_j\}$, которое приближает $f'_r(r, \tilde{\varphi})|_{r=0}$ с порядком не ниже третьего. Например,

$$z'_0 = \frac{1}{h_2} \left[3(z_1 - z_0) - \frac{3}{2}(z_2 - z_0) + \frac{1}{3}(z_3 - z_0) \right] \quad (2.2)$$

— приближение производной с третьим порядком аппроксимации.

По набору $\{z_j\}$ и z'_0 строим $S_{\tilde{\varphi}}(r)$ — непериодический S-сплайн на отрезке $[0, 1]$. Будем считать, что $m_2 < M_2 \zeta_*$ (здесь $\zeta_* = 0.93096$). Это гарантирует, что собственные значения матрицы U по модулю не будут превосходить единицы. Тогда построенный для $\tilde{\varphi}$ сплайн $S_{\tilde{\varphi}}(r)$ будет аппроксимировать функцию $f(\tilde{\varphi}, r)$ при $r \in [0, 1]$.

Определение 3. Назовем φ - r -сплайном функцию $S(\varphi, r)$, значение которой при любом r и φ определяется по следующему алгоритму: по набору $\{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$, z'_0 строим $S_{\varphi}(r)$, затем полагаем $S(\varphi, r) = S_{\varphi}(r)$.

По другому $S(\varphi, r) = \{S_{\varphi}(r) | \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}\}$.

Очевидно, что этот сплайн можно дифференцировать по r 3 раза в любой точке, не принадлежащей сетке, то есть при $r \neq R_j$. При $r = R_j$ определим производную следующим образом:

$$\frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r+0), \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

Определение 4. Назовем p -й производной по φ от φ - r -сплайна ($p = 1, 2, 3$) функцию $\frac{\partial^p}{\partial \varphi^p} S(\varphi, r)$ на единичном круге, которая равна φ - r -сплайну, построенному по набору

$$\left\{ z_j = \frac{d^p}{d\varphi^p} S_j(\varphi), \quad j = 1, \dots, K_2, z_0 = 0 \right\}, \quad p = 1, 2, 3.$$

Как и в случае с производной по r , под производной по φ в точках $\varphi = \Phi_k$ понимается значение в точке $\varphi = \Phi_k + 0$.

2.2. Получение S -сплайна на круге как явной функции двух переменных

Будем обозначать фундаментальные сплайны по φ как $C_i(\varphi)$, а фундаментальные сплайны по аргументу r как $D_j(r)$.

$$\begin{aligned} S(\varphi, r) &= \left\{ S_\varphi(r) \mid \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\} \right\} = S_\varphi(r) = \\ &= \sum_{j=0}^{K_2} z_j D_j(r) = \sum_{j=0}^{K_2} D_j(r) \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Предпоследнее равенство следует из определения набора $\{z_j = S_j(\varphi)\}$ и разложения по фундаментальным сплай-

нам $S_j(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi)$. График фундаментального сплайна представлен на рис.2.

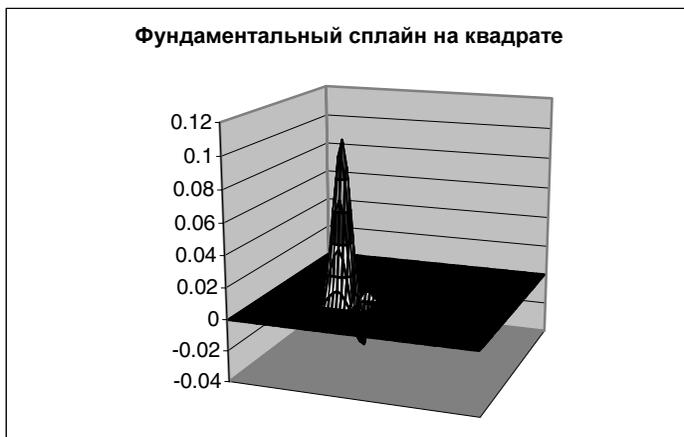


Рис. 2.

Теперь рассмотрим укрупненную сетку круга $\{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\}$, где $H_1 = m_1 h_1$ и $\{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\}$, где $H_2 = m_2 h_2$. Рассмотрим вид S-сплайна в некотором произвольном секторе этой сетки:

$$\varphi = kH_1 + \tilde{\varphi}, r = lH_2 + \tilde{r}, \text{ где } |\tilde{\varphi}| \leq H_1 \text{ и } |\tilde{r}| \leq H_2. \quad (2.5)$$

В этом секторе фундаментальные BS-сплайны, согласно определению S-сплайна, представляются в виде полиномов третьей степени:

$$C_i(\varphi) = \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p, D_j(r) = \sum_{q=0}^3 c_{ql}^j \tilde{r}^q.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $S(\varphi, r)$ и меняя порядок суммирования, получим:

$$\begin{aligned} S(\varphi, r) &= \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p \sum_{q=0}^3 d_{ql}^j \tilde{r}^q = \\ &= \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q \left(\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} c_{pk}^i d_{ql}^j \right) = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 a_{pq}^{kl} \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Представление сплайна на круге в виде разложения по одномерным фундаментальным сплайнам (2.4) позволяет определить понятие смешанной производной для двумерного сплайна.

Определение 4. Под смешанной производной двумерного сплайна $\frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(r, \varphi)$, $0 \leq p + q \leq 3$ понимается следующая

конечная сумма: $\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \frac{d^p}{d\varphi^p} C_i(\varphi) \frac{d^q}{dr^q} D_j(r)$, состоящая из формальных производных от соответствующих фундаментальных сплайнов по r и φ .

2.3. Сходимость двумерного сплайна

Обозначим $h = \max(h_1, h_2)$.

Теорема 5. Пусть $m_1 < M_1 \zeta_*$, $m_2 < M_2 \zeta_*$ и выполнены условия:

$$f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]. \quad (2.7)$$

Тогда для сплайна $S(\varphi, r)$ справедливы оценки :

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} f(\varphi, r) \right| < C_{pq} h^{4-p-q}, \text{ где } 0 \leq p + q \leq 3.$$

Доказательство следует из построения двумерного сплайна, представления его в виде линейной комбинации фундаментальных одномерных сплайнов, а также из сходимости одномерных сплайнов.

2.4. Решение краевых задач с помощью сплайнов

Рассмотрим уравнение Пуассона с некоторыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -p(r, \varphi), & (r, \varphi) \in D, \\ u(r, \varphi)|_{\partial D} = f(r, \varphi). \end{cases} \quad (2.8)$$

Пусть D – некоторая область, лежащая внутри единичного круга.

Предлагаемый метод решения состоит в следующих шагах.

- 1) Представление предполагаемого решения уравнения в виде линейной комбинации фундаментальных сплайнов.
- 2) Применение метода Галеркина к уравнению в пространстве фундаментальных сплайнов.
- 3) Подстановка граничных условий.

Рассмотрим последовательно эти шаги. Представим решение уравнения в виде

$$S(\varphi, r) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=1}^{K_2} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r), \quad (2.9)$$

где $C_i(\varphi)$ и $D_j(r)$ – соответствующие фундаментальные одномерные сплайны.

Домножим исходное уравнение на r . Теперь будем домножать уравнение скалярно на $C_l(\varphi) D_k(r)$, где пары индексов l, k пробегает все значения $l = 0, \dots, K_1 - 1, k = 1, \dots, K_2$, но такие, что $(h_2 k, h_1 l) \in D$ (т.е. только для внутренних узлов

только для внутренних узлов области D). В нашем случае в качестве скалярного произведения возьмём интеграл по области D. Получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left\{ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = \\ & = - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi \end{aligned} \quad (2.10)$$

Заметим, что под интеграл вошел также якобиан r от преобразования в полярные координаты. Рассмотрим процесс интегрирования на примере круга. В случае других областей можно действовать подобным образом. Область интегрирования разбиваем на сектора вида $r \in [R_q, R_{q+1}]$, $\varphi \in [\Phi_p, \Phi_{p+1}]$, где $R_q = qH_2$, $q = 0, \dots, L_2$, $\Phi_p = pH_1$, $p = 0, \dots, L_1$. После этого мы можем разбить двойной интеграл на одномерные.

Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left\{ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi = \\ & = \sum_{p=0}^{L_1-1} \sum_{q=0}^{L_2-1} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} C_l(\varphi) D_k(r) r dr d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Теперь подставим разложение (2.9) и проинтегрируем по частям:

$$\sum_{i,j} \sum_{p,q} u_{ij} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} r^2 D_j''(r) D_k(r) + r D_j'(r) D_k(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \int_{R_q}^{R_{q+1}} D_j(r) D_k(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i''(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi \right\} = \\
 & = \sum_{i,j} \sum_{p,q} u_{ij} \left\{ r^2 D_j'(r) D_k(r) \Big|_{R_q}^{R_{q+1}} + \int_{R_q}^{R_{q+1}} r D_j'(r) D_k(r) - \right. \\
 & \left. - 2r D_j'(r) D_k'(r) dr \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i(\varphi) C_l(\varphi) d\varphi + \right. \\
 & \left. + \int_{R_q}^{R_{q+1}} D_j(r) D_k(r) dr \left(C_i'(\varphi) C_l(\varphi) \Big|_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} - \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} C_i'(\varphi) C_l'(\varphi) d\varphi \right) \right\} = \\
 & = \sum_{i,j} u_{ij} \left\{ \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \left(D_k(1) D_j'(1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \int_0^1 r D_k(r) D_j'(r) - 2r D_k'(r) D_j'(r) dr \right) + \right. \\
 & \left. - \int_0^{2\pi} C_l'(\kappa) C_i'(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_k(r) D_j(r) dr \right\} = - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Последнее уравнение ввиду произвольности выбора l и k представляет собой систему для определения коэффициентов u_{ij} . Чтобы сделать её полной, нам необходимо учесть граничные условия, которые дадут нам недостающее число уравнений:

$$\sum_{i,j} u_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \Big|_{\partial D} = f(\varphi, r).$$

Для круга радиуса единица они будут иметь вид:

$$\sum_{i,j} u_{ij} C_i(\varphi_l) D_j(1) = f(\varphi), \quad l = 0, \dots, K_1 - 1. \quad (2.12)$$

В общем же случае нам необходимо поставить граничные условия в точках пересечения сетки с границей области D , но столько, сколько нам недостает уравнений (с учетом того количества уравнений, которое получилось для полностью внутренних точек области). Встает закономерный вопрос о том, каким образом выбирать пары индексов (i, j) , которые определяют фундаментальные сплайны, участвующие в разложении предполагаемого решения для произвольной области внутри единичного круга. Во-первых, мы берем индексы, соответствующие всем внутренним узлам сетки, как мы это делали при домножении уравнения на фундаментальные сплайны. Во-вторых, мы берем все точки, лежащие на границе, или ближайшие к ним узлы, если двигаться по лучам сетки по направлению от границы.

Из системы уравнений (2.11) и (2.12) мы получаем коэффициенты u_{ij} в разложении решения по фундаментальным сплайнам, т.е. искомое приближенное решение.

Теорема 6. Пусть $u(r, \varphi)$ — точное решение уравнения (2.8), а $S(r, \varphi)$ — приближенное решение, полученное в результате вышеописанного метода. Пусть, кроме того, собственные значения матрицы U , построенной для сплайнов по r и по φ , по модулю меньше единицы. Тогда верна оценка:

$$|u(r, \varphi) - S(r, \varphi)| < Ch^4, \quad \text{где } h = \max(h_1, h_2).$$

Доказательство. Аппроксимируем точное решение u сплайном $\tilde{S}(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=1}^{K_2} v_{ij} C_i(\varphi) D_j(r)$. Пусть $u \in C^4$. Обозначим $y = u - \tilde{S}$. Тогда, применив теорему 5, получим, что

$|y^{(n)}(r, \varphi)| < C_1 h^{4-n}$, где $n = 0, 1, 2, 3$. Т.к. u — точное решение уравнения (2.8), то будет выполнено интегральное тождество:

$$\iint_D \Delta u C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi = \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi.$$

Разобьем область интегрирования на сектора, как мы это делали в методе Галеркина. Тогда мы сможем почленно дифференцировать $u = y + \tilde{S}$ два раза:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{L_1-1} \sum_{q=0}^{L_2-1} \left\{ \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (y + \tilde{S}) \right) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi \right\} = \\ & = \iint_D r^2 p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi. \end{aligned}$$

Теперь перенесем члены с y в правую часть, а оставшиеся проинтегрируем по частям, как мы это делали в методе Галеркина:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} v_{ij} \left\{ \int_0^{2\pi} C_l(\varphi) C_i(\varphi) d\varphi \left(D_k(1) D_j'(1) + \int_0^1 r D_k(r) D_j'(r) - 2r D_k'(r) D_j'(r) dr \right) - \right. \\ & \left. - \int_0^{2\pi} C_l'(r) C_i'(\varphi) d\varphi \int_0^1 D_k(r) D_j(r) dr \right\} = \\ & = - \iint_D p(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) r^2 dr d\varphi - \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi. \end{aligned}$$

Как мы видим, полученная система уравнений совпадает с системой (2.11) с точностью до членов с y . Матрицу этой системы обозначим $A = \{a_{lk}^{ij}\}$. Введем обозначение

$$z = S(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi) = \sum_{i,j} (u_{ij} - v_{ij}) C_i(\varphi) D_j(r).$$

Вычтем из полученной системы систему (2.11), тогда получим систему:

$$\sum_{i,j} a_{lk}^{ij} (u_{ij} - v_{ij}) = y_{lk}, \text{ или } A\bar{z} = \bar{y},$$

Здесь $\bar{z} = \{z_{ij} \mid z_{ij} = u_{ij} - v_{ij}\}$, а

$$\bar{y} = \left\{ y_{lk} \mid y_{lk} = \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi \right\}.$$

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi \leq \\ & \leq \sum_{p,q} \left| \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} \Delta y(r, \varphi) C_l(\varphi) D_k(r) dr d\varphi \right| \leq \\ & \leq \sup |\Delta y| \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} |C_l(\varphi) D_k(r) r^2| dr d\varphi. \end{aligned}$$

Обозначим

$$c_{p,l} = \sup_{\varphi \in [\Phi_p, \Phi_{p+1}]} |C_l(\varphi)|, \quad d_{q,k} = \sup_{r \in [R_q, R_{q+1}]} |D_k(r) r^2|.$$

Тогда в силу теоремы 5, примененной к y и её производным, получим:

$$\begin{aligned} & \sup |\Delta y| \sum_{p,q} \int_{R_q}^{R_{q+1}} \int_{\Phi_p}^{\Phi_{p+1}} |C_l(\varphi) D_k(r) r^2| dr d\varphi \leq Ch^2 \sum_{p,q} c_{p,l} d_{q,k} H_1 H_2 \leq \\ & \leq C m_1 m_2 h^4 \sum_{p,q} c_{p,l} d_{q,k} = C m_1 m_2 h^4 \left(\sum_p c_{p,l} \right) \left(\sum_q d_{q,k} \right). \end{aligned}$$

Теперь покажем, что получившиеся суммы ограничены суммой сходящейся геометрической прогрессии. Для этого нам потребуется леммы 3 (для периодического и непериодического случая), доказательство которых приведено в [1] и [2]. Из этих лемм, в частности, следует, что отклонение приближения фундаментальными сплайнами от начальных данных удовлетворяет соотношению $z_n = \left| C_l(nH_1) - \delta_{l,m_1n} \right| \leq \lambda^{n-l} z_l$, где δ_{l,m_1n} — символы Кронекера, $\lambda = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы U (1.9). Аналогичные соотношения имеют место и для фундаментальных сплайнов по r . Тогда элементы сумм, стоящих в скобках, ограничены по модулю членами сходящейся геометрической прогрессии, следовательно, их сумма ограничена суммой бесконечной сходящейся прогрессии, причем эта сумма не зависит от шагов h_1 и h_2 , что и требовалось доказать.

В силу единственности S-сплайнов фундаментальные сплайны будут линейно независимыми, а следовательно, матрица системы A является обратимой, значит:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= A^{-1} \bar{y} \quad \text{и} \quad \|\bar{z}\| \leq \|A^{-1}\| \|\bar{y}\| \Rightarrow \\ |z_{ij}| &\leq \|A^{-1}\| \max_{l,k} |y_{lk}| \leq C_2 h^4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad |S(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi)| &\leq C_2 h^4 \quad (\text{следует из теоремы 5}). \\ |u(r, \varphi) - S(r, \varphi)| &\leq |u(r, \varphi) - \tilde{S}(r, \varphi)| + |\tilde{S}(r, \varphi) - S(r, \varphi)| < C_1 h^4 + C_2 h^4 = Ch^4. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.5. Результаты численных расчетов

Методом, описанным выше, решалась задача:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 2, & r \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi); \\ u(r, \varphi) \Big|_{r=1} = \sin^2(\varphi). \end{cases}$$

Ниже представлена таблица точности, полученной при разном количестве точек на отрезке, путем сравнения с точным аналитическим решением. В соответствии с теоремой, коэффициент увеличения точности при уменьшении шага в 1,5 раза должен составлять $1,5^4 = 5,0625$.

Таблица 1

Кол-во полиномов по r или по φ	Точность	Коэффициент увеличения точности
2	$1,99746 \cdot 10^{-2}$	
4	$8,608 \cdot 10^{-3}$	2,32
6	$1,791 \cdot 10^{-3}$	4,804
9	$5,46 \cdot 10^{-4}$	3,28
14	$1,01 \cdot 10^{-4}$	5,45
21	$2,14 \cdot 10^{-5}$	4,66

Решение уравнения Пуассона на круге

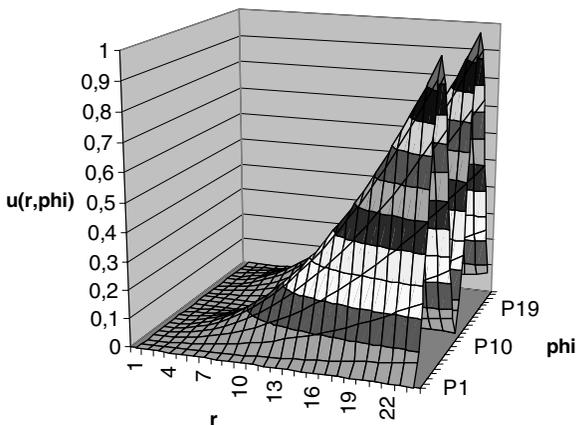


Рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций. В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып.10. — М.: Изд-во МГУ, 1984, — с. 197.
2. Амилющенко А.В., Лукьянов А.И., Силаев Д.А. Применение сплайна для приближения гладких периодических функций. Вестник московского университета. №6, 1996 г. Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященные 175-летию Чебышева. Т.1, с. 22–25.

SOLVING OF BOUNDARY TASKS BY USING S-SPLINE

Silaev D. A., Korotaev D. O.

(Russia, Moscow)

This article is dedicated to use of S-spline theory for solving equations in partial derivatives. For example, we consider solving of Poisson equation. S-spline – is a piecewise-polynomial. Its coefficients are defined by two states. Its first part of coefficients are defined by smoothness of spline. The least coefficients are determined by least-squares method. According to order of considered polynomial and number of conditions of first and second type we get S-splines with different properties. At this moment we have investigated order 3 S-splines of class C^1 and order 5 S-splines of class C^2 (they meets conditions of smoothness of order 1 and 2 accordinally). We will consider how the order 3 S-splines of class C^1 can be applied for solving equation of Poisson on circle and on other areas.