ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Харитонова Е. В., Ермаков С. В.

(Россия, Челябинск)

Рассмотрена модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегральных уравнений.

Введение. Одной из проблем теории и практики динамических измерений ([1]) является проблема оперативного оценивания детектируемого сигнала в условиях, когда входной сигнал трудно поддается прямому измерению, а выходной содержит значительную часть динамической погрешности (например, при измерении импульсных или других, быстро меняющихся во времени, сигналов).

Задачи, возникающие при этом в теории измерений, могут быть условно разделены на две группы – задачи восстановления сигнала и задачи анализа динамической погрешности. Первая из упомянутых задач – определение входного сигнала, искаженного средствами измерений, представляет собой обратную задачу теории измерений, которая может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения

$$A \cdot u(t) = x(t)$$

относительно функции $u(t)$ при неточно заданных операторе A и правой части $x(t)$.

В важном для приложений случае, когда функции $u(t)$ и $x(t)$ связаны дифференциальным соотношением $L[x(t)] = u(t)$

(здесь $L[\bullet]$ – дифференциальный оператор, порожденный краевыми условиями) обращение задачи приводит к интегральному уравнению первого рода (Вольтерра или Фредгольма – в зависимости от постановки задачи).

В настоящей работе рассматривается модель измерений, построенная на основе обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

Постановка задачи. Входной сигнал $u(t)$ первичного преобразователя (датчика) недоступен прямому наблюдению и регистрации и восстанавливается по наблюдениям за выходными показателями $x(t)$ измерительных приборов.

Наблюдаемый сигнал $x(t)$ является решением краевой задачи

$$L(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = u(t);$$
$$U_j(x) = l_j,\ \ j = 1,\ldots n, \tag{1}$$

где $U_j(x)$ – линейные в $C^n_{[a,b]}$ функционалы.

Пусть $\varphi_i(t),\ i = 1,\ldots n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $L(x) = 0$.

Если выполнено условие $\det\left|U_j(\varphi_i)\right| \neq 0,$ то задача (1) однозначно разрешима ([2]) и задача восстановления $U(t)$ по экспериментальным данным $x(t)$ может быть поставлена как задача решения интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$\int_a^b G(t,\tau)u(\tau)d\tau = \tilde{x}(t), \tag{2}$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина краевой задачи (1), $\widetilde{x}(t)$ – «исправленный» наблюдаемый сигнал, даваемый соотношением

$\tilde{x}(t) = x(t) - \Psi_U(t) + \int\limits_a^b G(t,\tau)L(\Psi_U)d\tau$, $\Psi_U(t)$ – интерполяционный многочлен, ассоциированный с граничными условиями рассматриваемой краевой задачи, существование и единственность которого обеспечивается упомянутым выше условием $\det\left|U_j(\varphi_i)\right| \neq 0$.

Основное интегральное соотношение. Пусть $L_1(x)$ – линейное дифференциальное выражение

$$L_1(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

с непрерывными на промежутке [a, b] коэффициентами, $L_2(x) = x^{(n)} + a_{n-1}(t)\cdot x^{(n-1)}$ – его главная часть. Пусть, далее, коэффициенты выражения $L_1(x)$ таковы, что краевые задачи

$$\begin{cases} L_1(x) = u(t) \\ U_j(x) = 0,\ j = 1,2,...,n \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} L_2(x) = u(t) \\ U_j(x) = 0,\ j = 1,2,...,n \end{cases} \quad (4)$$

однозначно разрешимы и существуют однозначно определяемые функции Грина $G_i(t,\tau), i = 1,2$, соответственно задач (3) и (4).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Gamma(t,\tau) = G_1(t,\tau) - G_2(t,\tau).$$

Имеет место следующая

<u>Теорема.</u> *Функция $\Gamma(t,\tau)$ определена на квадрате $K = \left\{(t,\tau) : a \le t \le b, a \le \tau \le b\right\}$, непрерывна там по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по переменной t, вплоть до n-го порядка включительно.*

◂ Каждая из функций Грина $G_i(t,\tau), i = 1,2$, по определению, непрерывна и непрерывно дифференцируема, вплоть до $n-2$-го порядка. Кроме того, их производные $n-1$-го порядка непрерывны при $t \in [a,\tau)\bigcup(\tau,b]$ и имеют одну и ту же особенность в точке $t=\tau$:

$$\frac{\partial^{n-1}G_i(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=\tau^+} - \frac{\partial^{n-1}G_i(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=\tau^-} = 1, \quad i=1,2,$$

откуда следует непрерывность $n-1$-ой производной $\dfrac{\partial^{n-1}\Gamma(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}$ в точке $t=\tau$.

Далее, заметим, что $\forall t \in [(a,\tau)\bigcup(\tau,b]$,

$$L_1(\Gamma) = L_1(G_1) - L_1(G_2) = L_1(G_1) - L_2(G_2) - \sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Поскольку в указанной области $L_1(G_1) = L_2(G_2) = 0$, то

$$L_1(\Gamma) = -\sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

В то же время

$$L_1(\Gamma) = \frac{\partial^n \Gamma(t,\tau)}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(t)\frac{\partial^{k-1}\Gamma(t,\tau)}{\partial t^{k-1}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^n \Gamma(t,\tau)}{\partial t^n} = -\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(t)\frac{\partial^{k-1}\Gamma(t,\tau)}{\partial t^{k-1}} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Выражение справа непрерывно при всех $t \in [a,b]$, в том числе и при $t=\tau$. Отсюда $\dfrac{\partial^n \Gamma(t,\tau)}{\partial t^n}$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, чем доказательство и завершается. ▸

Из вышеизложенного следует, что функция $\Gamma(t,\tau)$ является для каждого τ решением краевой задачи

$$L_1(\Gamma) = -\sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}, \quad U_j(\Gamma)=0,\ j=1,2,\ldots,n,$$

по переменной t, а значит, может быть представлена в виде

$$\Gamma(t,\tau)=\int_a^b G_1(t,s)V(s,\tau)ds,$$

где $V(s,\tau)=-\sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}\big|_{t=s}$.

Т.о. заключаем, что $\forall\tau\in[a,b]$ функция Грина $G_1(t,\tau)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$G_1(t,\tau)-G_2(t,\tau)=-\sum_{k=0}^{n-2}\int_a^b G_1(t,s)a_k(s)\cdot\frac{\partial^k G_2(s,\tau)}{\partial s^k}ds. \tag{5}$$

Полуоднородная задача. Пусть $L(x)=u$ линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(x)=x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_1(t)x'+a_0(t)x=u, \tag{6}$$

$U_1(x),\ U_2(t),\ldots,\ U_n(x)$ – линейно независимые линейные (непрерывные) функционалы в $C^n[a,b]$.

Полуоднородной краевой задачей для уравнения (6) будем называть задачу

$$L(x)=u;\ U_j(x)=0,\quad j=1,\ldots n. \tag{7}$$

Если $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения $L(x)=0$, то решение однородной задачи имеет вид: $x^0(t)=c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n$, где постоянные $c_j,\ j=1,\ldots n$ определяются соотношениями:

$$\begin{cases} c_1U_1(\varphi_1)+c_2U_1(\varphi_2)+\ldots+c_nU_1(\varphi_n)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1U_n(\varphi_1)+c_2U_n(\varphi_2)+\ldots+c_nU_n(\varphi_n)=0.\end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, что если ранг матрицы $U = \left\| U_j(\varphi_k) \right\|_{j,k=1,\ldots n}$ равен n, то у системы (8) существует только тривиальное решение $c_i = 0$. В этом случае полуоднородная краевая задача однозначно разрешима для любой непрерывной правой части $u(t)$, $t \in [a,b]$ и справедлива формула

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $G(t,\tau)$ — функция Грина дифференциального оператора (7). Тогда

$$\forall t \in [a,\tau) : G(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\varphi_i(t) \quad \forall t \in (\tau,b] : G(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\tau)\varphi_i(t).$$

Условия непрерывности функции Грина и первых ее $(n-2)$ производных дают:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)]\varphi_i(\tau) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)]\varphi_i'(\tau) = 0 \\ \qquad \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)]\varphi_i^{(n-2)}(\tau) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из условия на скачок $(n-1)$ производной в точке $t = \tau$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)]\varphi_i^{(n-1)}(\tau) = -1. \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) образуют систему n линейных уравнений относительно неизвестных разностей $\alpha_i(\tau)-\beta_i(\tau),\ i=1,\ldots n$, определитель которой $W[\varphi_1,...,\varphi_n]$ не обращается в ноль в силу линейной независимости функций $\varphi_j(\tau)$.

Краевые условия (7), примененные к функции Грина, дают:

$$U_j(G(t,\tau))=0,\ \ j=1,\ldots n.$$

В силу линейности функционалов $U_j(x)$, получаем:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\tau)U_j(\varphi_i(t))=0,\ j=1,\ldots n,\right. \qquad (12)$$

где

$$\mu_i(\tau)=\begin{cases}\alpha_i(\tau),\ t\in[a,\tau)\\ \beta_i(\tau),\ t\in(\tau,b]\end{cases}.$$

Положим $\gamma_i(\tau)=\alpha_i(\tau)-\beta_i(\tau),\ i=1,\ldots n$. Значения $\gamma_i(\tau)$ однозначно определяются упомянутой выше системой (10) – (11). Поэтому система (12) является системой n линейных (относительно, например, $\alpha_i(\tau)$) уравнений ($\beta_i=\gamma_i-\alpha_i$), определитель которой $U=\left\|U_j(\varphi_i)\right\|$ не равен нулю в силу принятых допущений. Следовательно, она однозначно разрешима, чем и завершается построение функции Грина задачи (7).

Многоточечная краевая задача. Рассмотрим уравнение n-го порядка с краевыми условиями:

$$\left.\begin{aligned}L(x)&=u\\ U_j(x)&=x(t_j),\quad j=1,\ldots n.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Здесь $t_j \in [a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Задачу (13) назовем *многоточечной* краевой задачей.

Пусть τ выбрана так, что $t_k < \tau < t_{k+1}$. Тогда

$$G(t,x) = \begin{cases} \sum \alpha_i \varphi_i(t), & t < \tau \\ \sum \beta_i \varphi_i(t) & t > \tau. \end{cases}$$

Полагая, как и выше, $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, запишем условия непрерывности (10) – (11):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\tau)\varphi_i^{(k)}(\tau) = 0, \ k = 1, \ldots, n-2 \\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\tau)\varphi_i^{(n-1)}(\tau) = -1. \end{cases}$$

Отсюда $\gamma_i(\tau) = \dfrac{\Delta_i(\tau)}{\Delta(\tau)}$, $i = 1, \ldots, n$, где $\Delta = W[\varphi_1, ..., \varphi_n]$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений однородного уравнения (13), $\Delta_i(\tau)$ – определители, получающиеся из $\Delta(\tau)$ заменой i-го столбца столбцом $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$.

Краевые условия (12) в рассматриваемом случае запишутся в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0, & s = 1, \ldots, k \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0, & s = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Учитывая выражения β_i через γ_i и α_i, приходим к системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0, \quad s = 1,\dots,k \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i(\tau)\varphi_i(t_s), \quad s = k+1,\dots,n. \end{cases}$$

которая однозначно разрешима. Тем самым, в случае многоточечной краевой задачи, функция Грина может быть эффективно построена.

Функция Грина вспомогательной задачи. Соотношение (5) представляет собой интегральное уравнение, которое может быть использовано для построения функции Грина $G_1(t,\tau)$, если только известна функция $G_2(t,\tau)$ – функция Грина вспомогательной задачи (4).

Поскольку фундаментальная система решений соответствующего вспомогательной задаче однородного уравнения легко может быть найдена:

$$\varphi_1(t) = \underbrace{\int\dots\int e^{-\int a_{n-1}(t)dt}}_{n-1} \underbrace{dt\dots dt}_{n-1}, \quad \varphi_k(t) = t^{n-k}, k = 2,3,...,n,$$

построение $G_2(t,\tau)$ осуществляется стандартными методами предыдущего пункта. Тем самым определяется ядро интегрального уравнения (5).

Например, для $n = 2$ несложные выкладки приводят к уравнению

$$G_1(t,\tau) - G_2(t,\tau) = -\int_a^b G_1(t,s)a_1(s)\cdot G_2(s,\tau)ds,$$

которое при каждом фиксированном значении $t \in [a,b]$ является уравнением Фредгольма II рода относительно функции $\Phi(\tau) = G_1(\bullet, \tau)$.

Численная реализация. Примеры. Численная реализация предлагаемого метода исследования обратной задачи теории измерений состоит из следующих двух этапов – построения функции Грина для задачи (1) на основе соотношения (5) и решения интегрального уравнения (2). Последняя задача относится к классу задач, которые неустойчивы относительно малых изменений исходных данных ([3],[4]).

Для нахождения ее решения применялся метод регуляризации А.Н.Тихонова [3] – задача решения интегрального уравнения (2) заменялась задачей минимизации функционала $M^{\alpha} = \|Au - \tilde{x}\|^2 + \alpha\|\Omega\|^2$, где Ω – стабилизирующий функционал, в настоящей работе взятый в вид $\Omega = \int_b^a \left[p(\tau)u^2(\tau) + q(\tau)u'^2(\tau)\right]d\tau$, α — параметр регуляризации, который определяется из условия минимума невязки и определяется точностью задания правой части уравнения (2). Известно (например [3],[4],[5]), что переход к дискретному аналогу нахождения приближенных (регуляризованных) решений уравнения (2) можно осуществить различными способами. Нами был использован следующий метод: вариационная задача метода невязки дискретизировалась конечно-элементными аппроксимациями с последующим анализом уравнения Эйлера дискретной задачи. Решение этой задачи с соответствующим образом подобранным параметром регуляризации (подробнее в [6]) и принималось за приближенное решение уравнения (2). На основании этих рассмотрений был построен программный комплекс, реализующий все этапы решения задач (5) и (2). Комплекс оформлен в виде загружаемого файла **«GraphTest.exe».** При его загрузке открывается окно «Параметры» , а также окно с графиком функции Грина (рис.1, слева) . В последнем доступен целый ряд опций, предназначенных для модификации графика – как интерактивно (с помощью «мыши»), так и с использованием контекстного меню. Программный комплекс имеет удобный интерфейс (рис.1, справа), позволяющий пользователю в диалоге с программой задавать и изменять параметры решаемых задач – как прямой многоточечной краевой задачи (1), так и обратной (2).

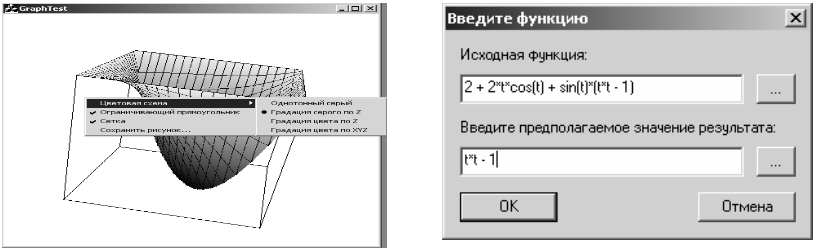

Рис. **1**. Интерфейс программного комплекса

Пример 1. Рассматривалась модельная задача

$$x^{V}(t)-7x^{IV}(t)-4x'''(t)+78x''(t)=u(t),$$

$$x(0)=0;\quad x(0,3)=0;\quad x(0,4)=0;\quad x(0,7)=0;\quad x(1)=0,$$

На основе решения уравнения (5) была построена функция Грина, решена прямая (рис.2, слева) с $u(t)=\sin 5t$ и обратная (рис.2, справа) с $x(t)=t(t-0,3)(t-0,4)\sin(t-0,7)\cos\dfrac{\pi t}{2}$ задачи. Заметим, что в рассматриваемом простом случае функция Грина может быть найдена аналитически, что дает возможность оценить эффективность предлагаемого алгоритма построения функции Грина, а также получить априорные оценки точности ее восстановления с помощью уравнения (5).

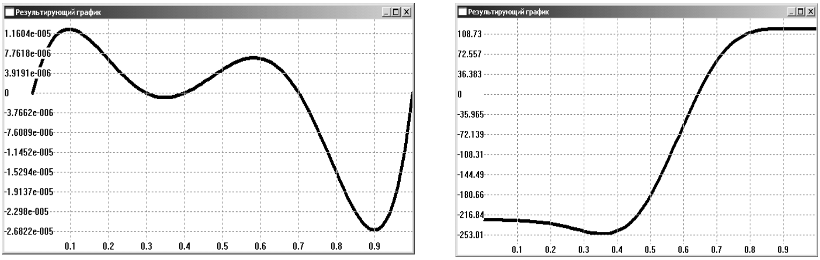

Рис. 2. Решение прямой и обратной задач примера 1

Пример 2. Рассматривалась задача

$$x''(t)+\cos(t)x'(t)+\sin(t)x(t)=u(t),\ x(-1)=0;\quad x(1)=0.$$

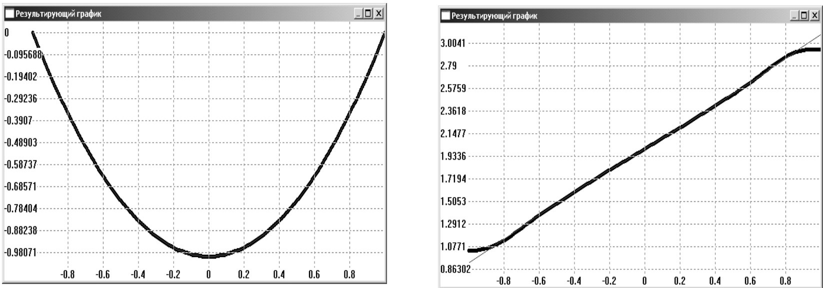

Рис. 3. Решение прямой и обратной задач примера 2

Для нее восстановлена функция Грина, решена прямая задача с $u(t)=2+2t\cos t+\sin t\left(t^2-1\right)$ (рис.3, слева) и обратная (рис.3, справа) с $x(t)=t^2-1$.

Авторы выражают признательность профессору Заляпину В.И. за внимание к настоящей работе.
Работа поддержана грантом РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В.А. Динамические измерения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Линейные некорректные задачи и их приложениия. – М.: Наука, 1978.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986.
6. Харитонова Е.В.. Численный анализ обратной задачи теории измерений // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — Серия Математика, физика, химия . 2005. — Вып.5, № 2(42), — С.42–48.

INTEGRAL EQUATIONS OF THE INVERSE PROBLEM OF MEASUREMENTS THEORY

Kharitonova H. V., Ermakov S. V.

(Russia, Chelyabinsk)

The model of measurements based on an analysis of the multipoint boundary problem for the ordinary differential equation was considered. This model reduces investigation of the inverse problem of measurements theory to the analysis of the integral equations.