ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юханова М. В.

(Россия, Рязань)

Определяются условия локальной управляемости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в некритическом и критическом случаях. Доказательство теорем проводится методом неподвижной точки.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u), \tag{1}$$

где $A(t) - n \times n -$ матрица, $B(t) - n \times m -$ матрица, $x \in R^n, u \in R^m -$ управление, $m < n, t \in [0,T], T -$ некоторое заданное положительное число, матрицы $A(t), B(t) -$ непрерывны на $[0,T]$, $f(t,x,u) - n$- мерная вектор-функция.

Пусть $R^k - k$- мерное векторное пространство;

$$|y| = \max_{1 \le i \le k}\{|y_i|\},$$

где $y - k$- мерный вектор вида $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, $\|B(.)\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|B(t)\|$, B — матрица,

$$H(\delta_0) = \{(t,x,u) : t \in [0,T], x \in R^n, u \in R^m, |x| \le \delta_0, |u| \le \delta_0\},$$

$$W(\delta_0) = \{\alpha \in R^n : |\alpha| \le \delta_0\},$$

где δ_0 – некоторое положительное число, функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет на множестве $H(\delta_0)$ условию Липшица по переменным x и u с постоянной $M_1(\delta)$, причем $M_1(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать непрерывные на сегменте $[0,T]$ функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $|u(.)|\le\delta_0$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U(\delta_0)$.

Символом $x(t,\alpha,u)$ обозначим решение системы (1), соответствующее управлению $u\in U(\delta_0)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0,\alpha,u)=\alpha$.

Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра на множестве $H(\delta_0)$.

Определение. Систему (1) назовем локально управляемой, если существует такое число $\delta>0$, что для любого вектора $\alpha\in W(\delta)$ найдутся $u\in U(\delta)$ и $T>0$ такие, что решение $x(t,\alpha,u)$ системы (1) удовлетворяет равенству $x(t,\alpha,u(T))=0$.

Заметим, что $x\equiv 0$ при $u=0$ является решением системы (1). Тогда по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра найдется $\delta^*\in(0,\delta_0]$ такое, что для любого $\alpha\in W(\delta^*)$ и для любого $u\in U(\delta^*)$ система (1) имеет решение $x(t,\alpha,u)$, определенное на сегменте $[0,T]$ при любом $t\in[0,T]$, удовлетворяющее неравенству $|x(t,\alpha,u)|\le\delta_0$.

Доказано [1], что решение системы (1), удовлетворяющее равенству $x(0,\alpha,u)=\alpha$, определяется равенством

$$x(t,\alpha,u)=X(t)\alpha+X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\xi)ud\xi+o(|\gamma|),$$

где $X(t)-$фундаментальная матрица решений системы $\dot{x}=Ax$, удовлетворяющая условию $X(0)=E$, $\gamma=(\alpha,u)$.

Поставим задачу – для любого $\alpha\in W(\delta^*)$ найти управление $u\in U(\delta^*)$, чтобы

$$X(T)\alpha+X(T)\int_0^T X^{-1}(\xi)B(\xi)ud\xi+o(|\gamma|)=0. \qquad (3)$$

Будем искать управление $u(t)$ в виде $u(t)=R(t)c$, где $R(t)$ – известная матрица размерности $m\times n$, непрерывная на сегменте $[0,T]$ (матрица $R(t)$ может быть специальным образом выбрана при решении конкретных прикладных задач), $c\in C(\delta_0)=\{c\in R^n:|c|\le\delta_0\}$ – неизвестный вектор. Поделим обе части равенства (3) на $X(T)$ и, обозначая

$$P=\int_0^T X^{-1}(\xi)B(\xi)R(\xi)d\xi,$$

получим

$$\alpha+Pc+o(|\gamma|)=0. \qquad (4)$$

Таким образом, нужно определить условия, при которых для каждого $\alpha\in W(\delta^*)$ существует вектор c, удовлетворяющий уравнению (4).

Лемма. Существует $\delta \in \left(0, \delta^*\right]$ такое, что при любых значениях $|c_1| \le \delta, |c_2| \le \delta$ и фиксированном $\alpha \in W\left(\delta^*\right)$ справедливо неравенство:

$$\left|o\left(|\gamma_1|\right) - o\left(|\gamma_2|\right)\right| \le M_2(\delta)|c_1 - c_2|,$$

где $M_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Для матрицы P будет выполнено одно из следующих условий:

I. $rangP = n$ — некритический случай,

II. $rangP = r, 0 \le r < n$ — критический случай.

I. Для операторного уравнения (4) в некритическом случае будет справедлива

Теорема 1. Если матрица P является неособенной, то найдется $\bar{\delta} \in \left(0, \delta^*\right]$, что для любого вектора $\alpha \in W(\bar{\delta})$ операторное уравнение (4) имеет единственное решение.

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что уравнение (4) можно записать в виде:

$$c = -P^{-1}\alpha - P^{-1}o\left(|\gamma|\right).$$

Оператор F определим следующим равенством:

$$Fc = -P^{-1}\alpha - P^{-1}o\left(|\gamma|\right).$$

Докажем, что $\delta \in \left(0, \delta^*\right]$ можно выбрать так, что при любом фиксированном α оператор F сжимающий. Из леммы следует существование такого $\delta \in \left(0, \delta^*\right]$, что для любых $|c_1| \le \delta, |c_2| \le \delta$ выполняется неравенство

$$|Fc_1 - Fc_2| \le \left\|P^{-1}\right\| \cdot \left|o\left(|\gamma_1|\right) - o\left(|\gamma_2|\right)\right| < \left\|P^{-1}\right\| \cdot M_2(\delta)|c_1 - c_2|,$$

где $M_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Выберем число $\delta \in \left(0, \delta^*\right]$ таким образом, чтобы $\left\|P^{-1}\right\| \cdot M_2(\delta) \le d < 1$, где $d > 0$ — некоторое число.

Следовательно, при любых $c_1, c_2 \in C(\delta)$ выполняется неравенство $\left|Fc_1 - Fc_2\right| \le d\left|c_1 - c_2\right|$. А это значит, что при любом $\alpha \in W(\delta)$ оператор F сжимающий.

Докажем, что оператор F отображает множество $C(\delta)$ в себя.

Так как $\lim\limits_{|\gamma| \to 0} \dfrac{o(|\gamma|)}{|\gamma|} = 0$, то число $\delta_1 \in (0, \delta]$ можно выбрать так, что при любом $\gamma(|\gamma| \le \delta_1)$ выполняется неравенство $\dfrac{|o(|\gamma|)|}{|\gamma|} < \dfrac{1}{2\left\|P^{-1}\right\|}$, тогда $\left|P^{-1}o(|\gamma|)\right| \le \left\|P^{-1}\right\| \left|o(|\gamma|)\right| < \dfrac{\delta_1}{2} < \dfrac{\delta}{2}$.

Из того, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} P^{-1}\alpha = 0$, следует, что число $\bar{\delta} \in (0, \delta]$ можно выбрать так, что при любом $\alpha \in W(\bar{\delta})$ справедливо неравенство $\left|P^{-1}\alpha\right| < \dfrac{\delta}{2}$.

Таким образом, для любого $\alpha \in W(\bar{\delta})$, любого $c \in C(\delta)$ (а следовательно, и $|\gamma| \le \delta$), выполняется неравенство $|Fc| \le \left|P^{-1}\alpha\right| + \left|P^{-1}o(|\gamma|)\right| < \delta$.

Следовательно, для любого $|\alpha| < \bar{\delta}$ оператор F отображает множество $C(\delta)$ в себя.

Получили, что для оператора F выполнены все условия теоремы Банаха. Следовательно, для каждого $\alpha \in W(\bar{\delta})$ во множестве $C(\delta)$ существует единственная неподвижная точка оператора F, то есть для любого $\alpha \in W(\bar{\delta})$ операторное уравнение имеет единственное решение. Теорема доказана.

Таким образом, если матрица P является неособенной, система дифференциальных уравнений (1) локально управляема.

II. Рассмотрим операторное уравнение (4) в критическом случае, когда $rangP < n$.

Пусть $o(|\gamma|)$ представимо равенством

$$o(|\gamma|) = f_k(c) + f_l(\alpha, c) + o\left(|c|^k\right) + o\left(|\gamma|^l\right),$$

где $f_k(c)$ – форма порядка k относительно $c, k \geq 2$, $f_l(\alpha, c)$ – форма порядка l относительно $\gamma = (\alpha, c)$, $l \geq 2$.

Тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\alpha + Pc + f_k(c) + f_l(\alpha, c) + o\left(|c|^k\right) + o\left(|\gamma|^l\right) = 0. \qquad (5)$$

Пусть матрица P ненулевая, $rangP = r, 0 < r < n$. Тогда в матрице P существует минор порядка r, отличный от нуля. Пусть, для определенности, этот минор расположен в левом верхнем углу. Применяя элементарные преобразования, заменяя $\alpha = \rho\beta, c = \rho\nu, \rho > 0, \rho \in R$, предполагая, что $k < l$, разделим первое уравнение полученной системы на ρ, второе – на ρ^k. Получим систему вида

$$\begin{cases} \beta + \bar{P}\nu + \bar{o}\left(\rho^{k-1}|\nu|^k\right) = 0, \\ \dfrac{1}{\rho^{k-1}}\varphi(\beta) + \bar{\bar{f}}_k(\nu) + \bar{\bar{O}}(\rho|\nu|^k) = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \bar{\bar{O}}(\rho|\nu|^k) = 0$ равномерно относительно ν.

Обозначим

$$S(\nu)=colon(\overline{P}\nu,\overline{\overline{f}}_k(\nu)),m(\beta,\rho)=colon(\beta,\frac{1}{\rho^{k-1}}\varphi(\beta)),$$

$$O(\rho|\nu|^k)=colon(\overline{o}\left(\rho^{k-1}|\nu|^k\right),\overline{\overline{O}}(\rho|\nu|^k)).$$

Тогда систему (6) можно записать в виде равенства

$$m(\beta,\rho)+S(\nu)+O(\rho|\nu|^k)=0. \qquad (7)$$

Теорема 2. Пусть на множестве $L=\{\nu:|\nu|=1\}$ вектор $S(\nu)\neq 0$. Тогда существуют такие положительные числа $\delta,\delta',\rho<\delta'$, что для любого $|\beta|\leq\delta$ уравнение (7) не имеет решений.

Будем предполагать, что существует такая точка $|\nu^*|=1$, что $\overline{P}\nu^*=0$ и $\overline{\overline{f}}_k(\nu^*)=0$.

Раскладывая вектор-форму $\overline{\overline{f}}_k(\nu)$ по формуле Тейлора в окрестности точки ν^* и обозначая $y=\nu-\nu^*$, приведем систему (6) к виду

$$\begin{cases} \beta+\overline{P}y+\overline{o}(\rho^{k-1}|y+\nu^*|^k)=0, \\ \frac{1}{\rho^{k-1}}\varphi(\beta)+D(\nu^*)y+\sum_{i=2}^{k}R_i(\nu^*,y)+\overline{\overline{O}}(\rho|y+\nu^*|^k)=0. \end{cases} \qquad (8)$$

Обозначим

$$Q=colon(\overline{P},D(\nu^*)),R_i^*(\nu^*,y)=(0,...,0,R_i(\nu^*,y)),$$

$$O^*(\rho|\nu|^k)=colon(\overline{o}\left(\rho^{k-1}|y+\nu^*|^k\right),\overline{\overline{O}}(\rho|y+\nu^*|^k)).$$

Тогда систему (8) можно представить равенством

$$m(\beta,\rho)+Qy+\sum_{i=2}^{k}R_i^*(\nu^*,y)+O^*(\rho\left|y+\nu^*\right|^k)=0 \qquad (9)$$

Теорема 3. Пусть Q — неособенная матрица. Тогда существуют положительные числа δ_1,δ_2 такие, что для каждого $\rho<\delta_1$, для любого вектора $\beta:|\beta|\le\delta_2$ уравнение (9) имеет единственное решение.

Теорема доказывается аналогично теореме 1.

Из теоремы 3 следует, что найдется единственное управление $u(t)=R(t)\rho^*(y^*+\nu^*),\rho^*<\delta_1$ из некоторого множества, определяемое с помощью вектора $c=\rho^*(y^*+\nu^*)$, удовлетворяющее равенству $x(T,\alpha,u)=0$. В этом случае задача локальной управляемости для системы (1) разрешима. Если Q является особенной матрицей, то повторяется алгоритм, описанный выше. Так как на каждом шаге ранг исследуемой матрицы не может уменьшиться, то либо через конечное количество шагов получим матрицу с рангом n, и в этом случае вопрос о локальной управляемости системы (1) разрешим, либо процесс преобразования будет бесконечным и задача локальной управляемости для системы (1) данным методом не разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудашкина О.В. Представление решения управляемой системы дифференциальных уравнений// Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2004. — №8. — С. 32–35.
2. Терехин М.Т. Периодические решения систем дифференциальных уравнений: Учебное пособие к спецкурсу. — Рязань, 1992.

ABOUT CONDITION OF LOCAL CONTROLLABILITY OF ONE SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yukhanova M. V.

(Russia, Ryazan)

The conditions of local controllability system of ordinary differential equation are defined. Theorem's are going by method of stationary point.