ГРУППОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Яковенко Г. Н.

(Россия, Долгопрудный)

Рассматривается одномерная дифференциальная модель изолированной популяции. Для некоторых коэффициентов допускается неопределённая зависимость от времени. Изучается ситуация, когда модель носит ярко выраженный групповой характер.

Рассматривается изолированная популяция, то есть взаимодействие возможно только между представителями популяции. Динамика численности популяции моделируется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка [1, 2]:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi_i(x), \qquad x \in \mathrm{R}^1, \tag{1}$$

где u_i — коэффициенты, $\varphi_i(x)$ — некоторые достаточно гладкие функции. Если фиксировать в (1) коэффициенты и интервал времени $[0, T]$, то каждая начальная точка x_0 сдвинется по решению системы (1) в конечную точку $x(T)$, то есть пара $\{u_i, [0,T]\}$ задаёт преобразование $x_0 \leftrightarrow x$ прямой. Произведением двух преобразований, соответствующих разным парам, называется последовательное выполнение сначала одного преобразования, затем другого. Результирующее преобразование может не совпадать ни с одним из ранее построенных преобразований. Продолжая перемножение преобразований, получим множество преобразований, которое, как правило, нельзя параметризовать конечным количеством параметров. Существует класс систем (1), когда множество преобразований, построение которого описано выше, — конечномерно (r-мерно) и, более того, это множество является r-параметрической группой. Системы, обладающие таким свойством, называются **групповыми** [3–6]. Для проверки, является ли конкретная система (1) групповой, нужно по функциям построить операторы $X_i = \varphi_i \dfrac{\partial}{\partial x}$, вычислить все коммутаторы $[X_i, X_k] = (X_i\varphi_k - X_k\varphi_i)\dfrac{\partial}{\partial x}$, те из них, которые не выражаются линейно с постоянными коэффициентами через имеющиеся, добавить к совокупности операторов, остальные отбросить и продолжить процесс вычисления коммутаторов. Система является групповой, если через конечное число шагов все вновь вычисленные коммутаторы будут отброшены [3–6]. Оставшиеся операторы — базис конечномерной вещественной алгебры Ли. У групповых систем (1) все преобразования — сдвиги вдоль решений при разных наборах коэффициентов — принадлежат r-параметрической группе преобразований

$$x = g(x_0, v_1, \ldots, v_r). \tag{2}$$

Отметим важный факт: если на место u_i в групповую систему (1) подставить некоторые функции $u_i(t)$ независимой переменной t, то преобразование — сдвиг вдоль решений, соответствующих паре $\{u_i(t), [0,T]\}$, — принадлежит группе (2). То есть найдётся такой набор параметров $v_1, \ldots, v_r$, что преобразование сдвига есть элемент группы (2) [5, 6]. Переход от пары $\{u_i(t), [0,T]\}$ к числам $v_1, \ldots, v_r$ происходит по определённому алгоритму [5]. В [3, глава IV] показано, что одномерной системе (1) может соответствовать в описанном выше смысле максимум 3-параметрическая группа (2). Так как принадлежность или отсутствие принадлежности к групповым системам выдерживает любые достаточно гладкие замены переменных $x \leftrightarrow \hat{x}$ [3–6], приведём наиболее простой за счёт выбора переменных вид одномерной групповой системы (1) (использована возможность коэффициентам $u_i(t)$ зависеть от переменной t):

$$\dot{x} = u_1(t) + 2u_2(t)x + u_3(t)x^2. \tag{3}$$

Уравнение (3) — уравнение Риккати. Уравнение (3) порождает в описанном выше смысле группу дробно-линейных преобразований $x_0 \leftrightarrow x$ [3, глава II; §7, п. 8]:

$$x = v_1 + \frac{x_0 e^{2v_2}}{1 - x_0 v_3}. \tag{4}$$

Обсудим вопрос о симметриях по состоянию [5, п. 7; 7] уравнения (3): таких заменах переменных $x \leftrightarrow \hat{x}$ в уравнении (3), что в новых переменных система имеет такой же вид (3), и поэтому если $x(t)$ — решение уравнения (3), то и $\hat{x}(t)$ — решение этого же уравнения. Уравнение (3) допускает только тривиальное преобразование симметрии по состоянию — тождественное [5, п.7, пример 7.2]. Но если (3) добавлением двух уравнений погрузить в класс L-систем [5, п.6] (вычисление новых уравнений происходит по определённому алгоритму [5])

$$\begin{aligned} &\dot{x} = u_1(t) + 2u_2(t)x + u_3(t)x^2, \\ &\dot{y} = 2u_2(t) + 2u_3(t)x, \\ &\dot{z} = u_3(t)e^y, \end{aligned} \tag{5}$$

то система (5) допускает 3-параметрическую группу симметрий

$$\begin{aligned} &\hat{x} = \frac{x + a_1(e^y - xz)}{1 - a_1 z}, \\ &\hat{y} = y + a_2 \ln(1 - a_1 z), \\ &\hat{z} = \frac{z(e^{a_3} - a_1 a_2) + a_3}{1 - a_1 z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Если известно частное решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы (5), то подстановка его в первое уравнение группы симметрий (6) приводит к общему решению уравнения (3) с произвольной постоянной a_1.

В [6, 8] была поставлена и частично решена задача о математическом моделировании групповыми системами популяционных взаимодействий. В случае когда популяция испытывает только внутренние взаимодействия, динамику можно смоделировать одномерным уравнением (1) (в [1, 2] приведены многочисленные примеры). Если ограничиться классом групповых систем, то с точностью до выбора переменной, описывающей состояние популяции, множество математических моделей исчерпывается уравнением (3). Уравнению (3) соответствует модель Мальтуса (в (3) $u_1(t) = 0$, $u_3(t) = 0$), логистическая модель Ферхюльста (в (3) $u_1(t) = 0$), режим с обострением (в (3) $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 0$), режимы с отловом (в (3) $u_1(t) \neq 0$) и т. д. [1, 2]. С учётом того что в уравнении (3) можно сделать любую (в том числе и нелинейную) замену переменной x, множество моделей и режимов существенно расширяется. Добьёмся, например, того, что уравнение (3) моделирует режим

$$\dot{y} = \frac{y^2}{a + by},$$

промежуточный между «Мальтусом» (при $a = 0$) и «режимом с обострением» (при $b = 0$) [1, формула (2.1.11)]. Указанную правую часть можно создать в качестве коэффициента при одной из функций $u_i(t)$. Приведём все три варианта замен переменных и три вида уравнения (3) в новых переменных:

1. $x = (by \ln y - a)\dfrac{1}{y}$,

$$\dot{y} = \frac{y^2}{a+by}u_1(t) + \frac{(by\ln y - a)y}{a+by}u_2(t) + {}$$
$$+\frac{(by\ln y - a)^2}{a+by}u_3(t);$$

2. $x = y^b e^{-\frac{a}{y}}$,

$$\dot{y} = u_1(t)\frac{y^{2-b}}{a+by}e^{\frac{a}{y}} + u_2(t)\frac{y^2}{a+by} + u_3(t)\frac{y^{2+b}}{a+by}e^{-\frac{a}{y}};$$

3. $x = \dfrac{y}{a - by\ln y}$,

$$\dot{y} = \frac{(a - by\ln y)^2}{a+by}u_1(t) + \frac{y(a - by\ln y)}{a+by}u_2(t) + {}$$
$$+\frac{y^2}{a+by}u_3(t).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00940) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2094.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 368 стр.
2. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть I. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 232 стр.
3. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС, 2003. — 400 с.

4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
5. Яковенко Г.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2002. — 3. — С. 40–83. (http://www.neva.ru/journal)
6. Яковенко Г.Н. Теоретико-групповой анализ динамики взаимодействующих популяций // Электронный журнал «Исследовано в России». 2003. — 88 — С. 981–990. (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/088.pdf)
7. Яковенко Г.Н. Группы, допускаемые математическими моделями взаимодействующих популяций // Сборник научных трудов Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Т. 11, вып. 2 / Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. С. 141–145.
8. Яковенко Г.Н. Группы и алгебры Ли — средства для моделирования экосистем // Сборник научных трудов Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 10. Часть 2 / Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. С. 167–177.

GROUP MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF ISOLATED POPULATION

Yakovenko G. N.

(Russia, Dolgoprudny)

One-dimentional differential model of isolated population is considered. Some coefficients are allowed dependence from time. Situation is investigated when a model have pronounced group nature.