ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПОПУЛЯЦИЙ: ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МОДЕЛИ

Яковенко Г. Н.

(Россия, Долгопрудный)

Обсуждается двумерная дифференциальная модель взаимодействия двух популяций. Для некоторых коэффициентов допускается неопределённая зависимость от времени. Изучается ситуация, когда модель носит групповой характер.

Введение. Работа продолжает цикл статей, посвящённых математическому моделированию биологических взаимодействий системами обыкновенных дифференциальных уравнений с ярко выраженной групповой структурой. В [1, 2] были приведены минимальные сведения о групповых системах и рассмотрена модель взаимодействия n популяций. От модели Лотка–Вольтерра введённая модель отличается (кроме размерности) тем, что, во-первых, допускается зависимость постоянных от времени, во-вторых, переменные состояния входят в уравнения в достаточно произвольных степенях. В [3] были изучены преобразования симметрии групповых моделей — допускаемые группы. В [4] рассмотрены все (с точностью до преобразования переменных) одномерные групповые системы — модели изолированной популяции. В настоящей работе рассматриваются двумерные групповые системы и обсуждается их связь с моделированием взаимодействия популяций.

1. Постановка задачи. Математическое моделирование взаимодействия двух видов проводится на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 6]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(t, x_1, x_2, u_1, \ldots, u_m), \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(t, x_1, x_2, u_1, \ldots, u_m), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где t — независимая переменная (время), x_1, x_2 — биомассы видов, точка над переменной — производная по времени t, u_k — параметры, на место которых могут быть подставлены достаточно произвольные функции времени t. Если фиксировать в (1.1) интервал времени $t \in [0, T]$ и параметры-функции $u_k(t)$, то сдвиг каждого начального состояния $x(0)$ в конечное $x(T)$ создаст преобразование $x(0) \leftrightarrow x(T)$ плоскости. В общем случае множество таких преобразований нельзя вместить в конечно-параметрическое семейство. Система (1.1) называется **групповой** [1, 2, 7], если каждое преобразование $x(0) \leftrightarrow x(T)$, порождённое парой $\{[0, T], u_k(t)\}$, принадлежит конечно-параметрической группе преобразований плоскости. В [8, §19, §20] перечислены все локальные группы Ли преобразований плоскости (все — с точностью до замены переменных). В зависимости от наличия или отсутствия **систем импримитивности** группы делятся на два класса: **импримитивные** и **примитивные.** Система импримитивности на плоскости — это такое семейство кривых, что каждое преобразование, принадлежащее группе, переводит точки любой кривой в точки одной и той же кривой семейства. В соответствии с классификацией групп на плоскости можно провести классификацию групповых системы второго порядка. Рассмотрим подробно примитивный случай.

2. Примитивные групповые системы — отсутствуют системы импримитивности. С точностью до замены переменных такие групповые системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 u_1 + x_1^2 u_3 + x_2 u_5 + x_1 x_2 u_6 + u_7, \\ \dot{x}_2 &= x_2 u_2 + x_1 x_2 u_3 + x_1 u_4 + x_2^2 u_6 + u_8. \end{aligned} \tag{2.1}$$

При любом интервале $t \in [0,T]$ и любых параметрах-функциях $u_k(t)$ преобразование $x(0) \leftrightarrow x(T)$ плоскости (сдвиги вдоль решений системы (2.1)) принадлежит восьмипараметрической группе дробно-линейных преобразований [8, §19]:

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_1 x_1 + a_5 x_2 + a_7}{a_3 x_1 + a_6 x_2 + 1}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{a_4 x_1 + a_2 x_2 + a_8}{a_3 x_1 + a_6 x_2 + 1}. \tag{2.2}$$

Групповой системе (2.1) и группе преобразований (2.2) соответствуют структурные постоянные[2]

$$\begin{aligned}
&C_{13}^3 = 1, \quad C_{14}^4 = 1, \quad C_{15}^5 = -1, \quad C_{17}^7 = -1,\\
&C_{24}^4 = -1, \quad C_{25}^5 = 1, \quad C_{26}^6 = 1, \quad C_{28}^8 = -1,\\
&C_{35}^3 = -1, \quad C_{37}^2 = -1, \quad C_{37}^3 = -2, \quad C_{38}^3 = -1,\\
&C_{45}^1 = 1, \quad C_{45}^2 = -1, \quad C_{46}^3 = 1, \quad C_{47}^8 = -1,\\
&C_{58}^7 = -1, \quad C_{67}^5 = -1, \quad C_{68}^1 = -1, \quad C_{68}^3 = -2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(Подробности сопоставления групповой системе структурных постоянных см. в [1, 2, 7].) На основе базовой групповой модели (2.1) и приведённых структурных постоянных (2.3) можно строить новые групповые модели двумя способами: специализация параметров-функций $u_k(t)$ приводит к подсистемам системы (2.1) и подгруппам группы (2.2); произвольная неособенная (в том числе и нелинейная) замена переменных не выводит из класса групповых систем. Рассмотрим примеры преобразований системы (2.1) первым и вторым способами.

Положим в (2.1) $u_4 = 0,\ u_5 = 0,\ u_6 = 0,\ u_7 = 0,\ u_8 = 0$. При этом, как видно по структурным постоянным (2.3), из восьмипа-

---

2 Здесь и далее приводятся только ненулевые структурные постоянные C_{ij}^k при условии $i < j$.

раметрической группы (2.2) выделяется трёхпараметрическая подгруппа. Система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 u_1 + x_1^2 u_3, \\ \dot{x}_2 &= x_2 u_2 + x_1 x_2 u_3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Новая система — групповая с структурными постоянными

$$C_{13}^3 = 1 \tag{2.5}$$

(см. сноску [2]). Все сдвиги $x(0) \leftrightarrow x(T)$ вдоль решений системы (2.4) при разных парах $\{[0,T], u_k(t)\}$ принадлежат группе

$$\tilde{x}_1 = \frac{a_1 x_1}{a_3 x_1 + 1}, \qquad \tilde{x}_2 = \frac{a_2 x_2}{a_3 x_1 + 1} \tag{2.6}$$

— подгруппе группы (2.2). Поставим в соответствие системе (2.4) L-систему [1, 2, 7]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 u_1 + x_1^2 u_3, \\ \dot{x}_2 &= x_2 u_2 + x_1 x_2 u_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

— групповую систему, удовлетворяющую условиям: первые два уравнения совпадают с системой (2.4); количество переменных x_i равно количеству параметров в группе сдвигов; структурные постоянные у L-системы (2.7) такие же (2.5), как у системы (2.4). У L-систем совпадают размерность пространства состояний, количество параметров в группе сдвигов вдоль решений и количество параметров в группе симметрий. Переход от системы (2.4) к L-системе оправдан тем, что заменой переменных, в которой участвует и вновь введённая переменная x_3, можно перевести групповую систему (2.4) в любую двумерную групповую систему с такими же структурными постоянными (2.5), как у (2.4). В [1, 2] была введена групповая система, моделирующая взаимодействие n видов. При $n=2$ групповая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \frac{1}{k^2}(\alpha u_1 - \beta u_2)z_1 + c_1 z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta} u_3,\\
\dot{z}_2 &= \frac{1}{k^2}(\beta u_1 + \alpha u_2)z_2 + c_2 z_1^{\alpha} z_2^{\beta+1} u_3,\\
\dot{z}_3 &= z_1^{\alpha} z_2^{\beta} u_3.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Обозначено: c_1, c_2, α, β — произвольные вещественные числа, $k^2=\alpha^2+\beta^2$. Первые два уравнения моделируют взаимодействие двух видов (обобщение модели Лотки–Вольтерра), третье уравнение добавлено для погружения в L-систему. Некоторая вычурность параметров-функций — коэффициентов при переменных z_1, z_2 вызвана стремлением, чтобы групповой системе (2.8) при любых числах c_1, c_2, α, β соответствовали структурные постоянные (2.5). Система (2.7) — частный случай системы (2.8): при $c_1=1$, $c_2=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$. Совпадение структурных постоянных (2.5) гарантирует возможность заменой переменных привести систему (2.8) к более простому виду (2.7). Для наглядности замену переменных проведём в два этапа (вычисления опущены). На первом — замена переменных

$$z_1 = y_1^{\frac{\alpha}{k^2}} y_2^{-\frac{\beta}{k^2}} e^{\gamma y_3}, \qquad z_2 = y_1^{\frac{\beta}{k^2}} y_2^{\frac{\alpha}{k^2}} e^{\lambda y_3}, \qquad z_3 = y_3 \tag{2.9}$$

переведёт систему (2.8) в систему

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1 u_1 + c y_1^2 u_3,\\
\dot{y}_2 &= y_2 u_2 + y_1 y_2 u_3,\\
\dot{y}_3 &= y_1 u_3.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

В (2.9) и (2.10) использованы обозначения

$$\gamma = \frac{\beta}{k^2}(\beta c_1 - \alpha c_2 + 1), \qquad \lambda = -\frac{\alpha}{k^2}(\beta c_1 - \alpha c_2 + 1),$$
$$c = \alpha c_1 + \beta c_2, \qquad k^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

На втором этапе трёхпараметрическое (τ_i — параметры) семейство замен переменных

$$y_1 = x_1\left(c + \tau_1 e^{x_3}\right)^{-1}, \qquad y_2 = x_2 \tau_2 e^{\frac{1-c}{c}x_3}\left(c + \tau_1 e^{x_3}\right)^{-\frac{1}{c}},$$
$$y_3 = \frac{1}{c}x_3 - \frac{1}{c}\ln\left(c + \tau_1 e^{x_3}\right) + \tau_3 \tag{2.11}$$

переведёт систему (2.10) в систему (2.7). При $c = 1$ правые части систем (2.10) и (2.7) совпадают и семейство (2.11) — трёхпараметрическая группа симметрий системы (2.7): при фиксированных функциях $u_k(t)$ преобразования (2.11) переводят решения в решения. Преобразования (2.11) универсальны: осуществляют перевод (2.6) $\leftrightarrow$ (2.9) при любых значениях c. При конкретных значениях c выбором параметров τ_i можно выделить из семейства (2.11) более простые преобразования. Например, при $c \neq 0$ — преобразование

$$y_1 = \frac{1}{c}x_1, \qquad y_2 = x_2 e^{\frac{1-c}{c}x_3}, \qquad y_3 = \frac{1}{c}x_3,$$

при $c = 0$ — преобразование

$$y_1 = x_1 e^{-x_3}, \qquad y_2 = x_2 \exp\left(-x_3 - e^{-x_3}\right), \qquad y_3 = -e^{-x_3}.$$

3. Импримитивные групповые системы. Предполагаем, что система импримитивности представима в виде $x_1 = c$, в противном случае этого можно добиться заменой переменных. С точ-

С точностью до замены переменных состояния импримитивные системы имеют вид [8, §20]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 u_1 + x_1^2 u_2 + u_3, \\ \dot{x}_2 &= (r-5) x_1 x_2 u_2 + x_2 u_4 + u_5 + x_1 u_6 + \cdots + x_1^{r-5} u_r. \end{aligned} \tag{3.1}$$

При любом интервале $t \in [0, T]$ и любых параметрах-функциях $u_k(t)$ преобразование $x(0) \leftrightarrow x(T)$ плоскости (сдвиги вдоль решений системы (3.1)) принадлежит r-параметрической группе преобразований:

$$\widehat{x}_1 = \frac{a_1 x_1 + a_3}{1 + a_2 x_1}, \quad \widehat{x}_2 = \frac{a_4 x_2}{(1 + a_2 x_1)^{r-5}} + \sum_{k=0}^{r-5} \left(\frac{a_1 x_1 + a_3}{1 + a_2 x_1} \right)^k a_{k+5}\,. \tag{3.2}$$

Аналогично примитивному случаю, рассмотренному в предыдущем пункте, специализацией параметров-функций $u_k(t)$ можно из системы (3.1) высекать групповые подсистемы, которым в группе (3.2) соответствуют некоторые подгруппы. Возможно также заменой переменных x_1, $x_2 \leftrightarrow y_1\ y_2$ переходить к другим системам импримитивности и к другим групповым системам с такими же, как у системы (3.1), структурными постоянными.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00940) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2094.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яковенко Г.Н. Группы и алгебры Ли — средства для моделирования экосистем // Сборник научных трудов Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 10. Часть 2 / Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — С. 167–177.
2. Яковенко Г.Н. Теоретико-групповой анализ динамики взаимодействующих популяций // Электронный журнал «Исследовано в Рос-

сии». 2003 — 88. — С. 981–990.
3. (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/088.pdf)
4. Яковенко Г.Н. Группы, допускаемые математическими моделями взаимодействующих популяций // Сборник научных трудов Международной научной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Т. 11, вып. 2 / Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — С. 141–145.
5. Яковенко Г.Н. Групповые математические модели изолированной популяции // Настоящий сборник. — С. ?–?.
6. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 368 стр.
7. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть I. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 232 стр.
8. Яковенко Г.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». 2002. — 3. — С. 40–83. (http://www.neva.ru/journal)
9. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС, 2003. — 400 с.

INTERACTION of TWO POPULATIONS: GROUP-THEORETIC MODELS

Yakovenko G. N.

(Russia, Dolgoprudny)

The two-dimensional differential model of interaction of two populations is considered. For some coefficients the uncertain time dependence is admitted. The situation is studied, when the model has group character.