# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПО А.Н. ТИХОНОВУ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОСТАТИКИ

**Полякова Р. В., Жидков Е. П., Юдин И. П.**

(Россия, Дубна)

*В данной работе решается задача поиска конструкции магнитной системы для создания магнитного поля с требуемыми характеристиками в заданной области, которая описывается уравнением Фредгольма. В работе предлагается метод решения этих задач с помощью регуляризованных итерационных процессов. На примере конкретной магнитной системы проводится численное исследование влияния различных факторов на характер создаваемого магнитного поля.*

**1. Введение.** При проектировании магнитных систем возникает задача: по заданному магнитному полю определить параметры источников — токи или их геометрические характеристики или и то и другое одновременно. Определение по заданному полю распределения токов в магнитной системе, геометрия которой известна, является линейной обратной задачей. Когда же требуемое магнитное поле необходимо создать с помощью проводников, величина тока в которых варьируется, так же как и координаты их положения, при условии, что ток во всех проводниках одинаков (безжелезная система), приходим к решению нелинейной обратной задачи. В работе построена математическая модель магнитной системы для такого типа задач, предлагается метод и численный алгоритм их решения, основанный на методе регуляризации по Тихонову. Магнитное поле задается какой-либо одной из своих компонент $(H_x, H_y, H_z)$, что зависит от конкретной задачи, поэтому в дальнейшем используем просто $H$ для его обозначения.

**2. Математическая модель магнитной системы.** Пусть в некоторой области $U$ с помощью источников тока, расположенных в области $S$, необходимо создать поле $H$ с заданными характеристиками. Известно, что поле в любой точке $z$ множества $U$ в этом случае определяется уравнением

$$H(z) = \int_S J(s)G(z,s)ds, \quad z \in U, \ s \in S, \tag{1}$$

где $J(s)$ – функция распределения плотности тока в системе, $G(z,s)$ – функция Грина (ее аналитический вид приводим ниже).

Случай обратной задачи – определение по заданному полю распределения плотностей токов в магнитной системе, геометрия которой известна, – является линейной обратной задачей. В этом случае задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма I-го рода (1) с неизвестной функцией $J(s)$. Если же магнитное поле формировать не только варьированием плотностей тока, но и расстановкой источников тока, то в этом случае приходим к необходимости решать нелинейную обратную задачу с неизвестными $J(s)$ и $s \in S$.

**3. Численный алгоритм решения задачи.** Известно, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма I-го рода (1) относится к классу некорректно поставленных задач, т.к. малым изменениям входных данных $H(z)$ могут соответствовать сколь угодно большие изменения в решении $J(s)$. Для получения устойчивого решения некорректных задач А. Н. Тихоновым разработаны регуляризующие алгоритмы [1]–[3].

Если магнитная система представляет собой дискретный набор катушек, поле $H(z)$ в любой точке $z \in U$ определяется следующим образом:

$$H(z)=\sum_{i=1}^{M} J_i \int_{\Delta s_i} G(z,s)ds, \qquad (2)$$

где $M$ — число катушек, $J_i$ — плотность тока в i-ой катушке, $\Delta s_i$ — сечение i-ой катушки.

Совершим переход от интегрального уравнения (2) к системе $M$ алгебраических уравнений, которую и используем в численном моделировании задачи.

Решив полученную систему уравнений, определим дискретный набор $J_l$, $l=1\div M$, который является решением задачи (2). Таким образом, будет найдено распределение плотностей токов магнитной системы для создания поля $H(z_j), j=1\div N$, $z_j\in U$ в случае линейной задачи магнитостатики. Далее переходим к описанию численного алгоритма для нелинейного случая. Пусть в некоторой области $S$ с помощью расстановки $M$ проводников с одинаковым током $I_0$ необходимо создать поле $H$. В такой системе $H(z)$, $z\in U$ будет $H(z)=I_0\sum_{i=1}^{M} G(s_i,z)$, где $G(s_i,z)$ — функция Грина для i-го проводника. Требуется определить такие ток $I_0$ и координаты $s_i$ проводников, которые бы наилучшим образом обеспечивали заданное поле $H(z)$, $z\in U$. Функция $G(s_i,z)$ обычно нелинейная относительно координат проводников $s_i$, поэтому рассматриваемая задача является нелинейной обратной задачей. Дополнительные трудности при решении обратных задач вызывает ограничение на параметры [4]. Однако в некоторых частных случаях можно эффективно находить решение, удовлетворяющее условиям задачи. Рассмотрим такой случай.

**4. Пример моделирования магнитной системы.** Рассмотрим пример практического применения разработанного алгоритма для создания безжелезного сверхпроводящего (СП) дипольного магнита, состоящего из прямоугольных токовых обмоток возбуждения, геометрия которого приводится на рис.1. Из рис.1 видно, что магнитная система состоит из прямоугольных витков, которые размещены по периметру прямоугольной апертуры магнита.

Алгоритм решения нелинейных обратных задач позволил рассчитать математическую модель такой системы, однородность поля в которой в $80\%$ апертуры составляет $10^{-5} \div 10^{-6}$ при величине поля 4–5 Тл.

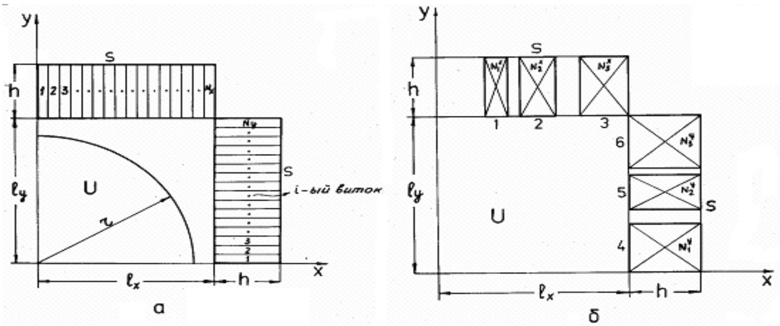


**Рис 1а, б.** Конфигурация СП диполя с плоской обмоткой; б - одна из возможных реальных конфигураций СП диполя

Математически задача ставилась следующим образом.

Пусть в некоторой области $U$ (см. рис.1а) необходимо создать однородное поле $H(z)$, $z \in U$ с помощью расположения $M$ проводников прямоугольного сечения в заданной ограниченной области $S$ при условии, что ток $I_0$ во всех проводниках одинаков. Для такой магнитной системы

$$H(z) = I_0 \sum_{i=1}^{M} G(s_i, z), \quad s_i \in S, z \in U. \tag{3}$$

В декартовой системе координат $s_i = \{x_i, y_i\}, z = \{x, y\}$

$$G(s_i, z) = \frac{y - y_i + b}{2} \ln \frac{(x - x_i + a)^2 + (y - y_i + b)^2}{(x - x_i - a)^2 + (y - y_i + b)^2} +$$

$$+\frac{y-y_i-b}{2}\ln\frac{(x-x_i-a)^2+(y-y_i-b)^2}{(x-x_i+a)^2+(y-y_i-b)^2}+$$

$$+(x-x_i+a)\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x-x_i+a}{y-y_i-b}-\operatorname{arctg}\frac{x-x_i+a}{y-y_i+b}\right)+$$

$$+(x-x_i-a)\times\left(\operatorname{arctg}\frac{x-x_i-a}{y-y_i+b}-\operatorname{arctg}\frac{x-x_i-a}{y-y_i-b}\right),$$

где $a$ – полуразмер шины вдоль $x$, $b$ – полуразмер шины вдоль $y$, $G(s_i,z)$ – функция Грина для прямоугольной шины. $M=N_x+N_y$, $N_x$ – число витков вдоль оси $x$, $N_y$ – число витков вдоль оси $y$ или $M=\sum_{l=1}^{k}N_l$, $k$ – количество блоков обмотки и $N_l$ – количество витков в l-ом блоке.

Необходимо определить не только $I_0$, но и подобрать конфигурацию блоков, которая создает однородное поле $H(z)$ в любой точке $z\in U$ с точностью не менее $10^{-5}-10^{-6}$. На рис. 2 приводятся непрерывные распределения $J_x^\alpha$ и $J_y^\alpha$ для $M=48$ виткам и приближения их кусочно-постоянными функциями «блоками».

В таблице 1 приводятся численные расчеты для оптимального варианта магнита, а на рис.1б приводится схема такого магнита.

**5. Заключение**

1. Рассматривается метод решения нелинейных обратных задач для описания магнитных систем некоторого класса.

2. Метод регуляризации решения некорректных задач с ограничениями на искомые параметры приводит нелинейную задачу типа (3) к решению $M$ последовательных нелинейных уравнений с одним неизвестным, что позволяет избежать трудностей,

связанных с решением системы нелинейных уравнений, к решению которых обычно приводят обратные задачи.

3. Результаты были использованы при проектировании и создании сверхпроводящего ускорителя ЛВЭ ОИЯИ.

**Таблица 1.** Значение координат центров «блоков» по $x$ и $y$, дающих наилучшую относительную точность низших гармоник в разложении однородного поля $H$

| | | x=const=3.8 | | | | | y=const=3.8 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_y$ | $N_{k_1}$<br>.<br>.<br>$N_2$ $N_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $N_x$ | $N_{k_2}$<br>.<br>.<br>$N_2$ $N_1$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | Средняя относительная точность низших гармоник $c_2, c_4, c_6$ |
| 20 | 10<br>5<br>5 | 0.509 | 1.597 | 2.859 | 9 | 6<br>2<br>1 | 1.002 | 2.294 | 3.14 | $0.3\times10^{6}\div0.5\times10^{6}$ |
| 20 | 12<br>8 | 0.842 | 2.649 | | 9 | 6<br>2<br>1 | 1.602 | 2.247 | 3.22 | $0.9\times10^{5}\div0.45\times10^{6}$ |

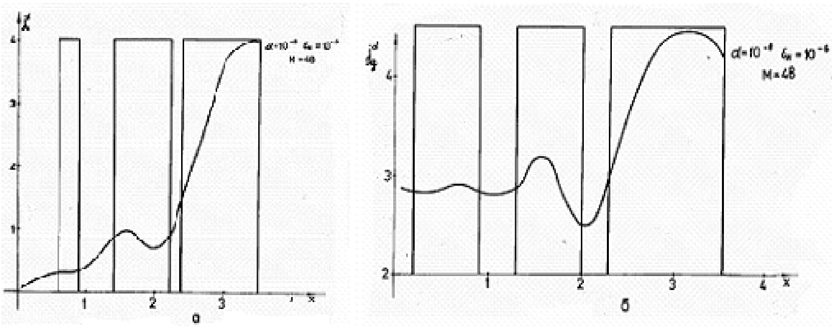

**Рис 2а, б.** Непрерывные распределения $J_x^{\alpha}(s)$ и приближения $J_y^{\alpha}(s)$ кусочно-постоянными функциями «блоками»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. ДАН, т.153, N1, стр. 49–52, 1963 г.
2. Тихонов А.Н. ДАН, т.151, N3, стр. 501–504, 1963 г.
3. Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. — Москва: Наука, 1979 г.
4. Поляк Б.Т. Итерационные методы решения некоторых некорректных вариационных задач. В кн. Вычислительные методы и программирование. — Вып.12. — Изд. МГУ, 1969. — 38–52.

## A. N. TIKHONOV' REGULARIZATION IN A MAGNETOSTATIC PROBLEM

Polyakova R. V., Zhidkov E. P., Yudin I. P.

(*Russia, Dubna*)

*The problem of searching for the design of the magnetic system for creation a magnetic field with the required characteristics in the given area is solved. On the basis of analysis of the mathematical model of the magnetic system rather a general approach is proposed to the solving of the inverse problem, which is written by the Fredgolm equation. It is known that such problems are incorrect ones. In the paper a method of solving those by means of regularized iterative processes is proposed. On the base of the concrete magnetic system we perform the numerical study of influence of different factors on the character of the magnetic field being designed.*