МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кассина Н. В., **Смирнов Л. В.**

(Россия, Нижний Новгород)

Решение задачи стационарного потокораспределения для произвольной гидросистемы без объёмов со свободным уровнем может быть сведено к поиску экстремумов функции многих переменных. В качестве этой функции используется функция Релея, выраженная через гидравлические характеристики участков рассматриваемой системы. Она же является функцией Ляпунова при исследовании устойчивости найденных стационарных режимов работы гидросистемы прямым методом Ляпунова.

Введение. Приведены результаты исследования динамики одномерного напорного течения несжимаемой жидкости в соединенных трубопроводами системах различных аппаратов и устройств. Такие системы широко используются в технике, например, при централизованном тепло-, водо-, и газоснабжении и, вообще, при трубопроводной транспортировке жидкой или газообразной среды. Развитие вычислительной техники привело к разработке численных алгоритмов и программ для решения задач, возникающих при проектировании и эксплуатации таких систем, называемых гидросистемами или гидравлическими сетями (ГС). В большинстве случаев при этом решается так называемая задача стационарного потокораспределения, состоящая в нахождении расходов транспортируемой среды в участках ГС, то есть в рёбрах ориентированного графа, соответствующего её геометрической структуре [1, 2]. Находятся также давления в вершинах этого графа, в которых происходит соединение или разделение потоков. Математическая модель обычно представляет собой систему уравнений, аналогичных закону Кирхгофа с учетом нелинейных связей между перепадами давления и расходами среды в участках. В докладе представлен основанный на применении методов аналитической механики и нелинейной теории колебаний подход [3, 4, 5], который позволяет получить исчерпывающие качественные представления о динамических свойствах гидросистем и обосновать принципиально новую методику решения задачи потокораспределения.

Математическая модель ГС

Рассмотрим произвольную ГС (см. рис. 1), состоящую из N участков и L узлов, из которых L' — внутренние. В сложных ГС число участков велико, и их соединение происходит в узлах.

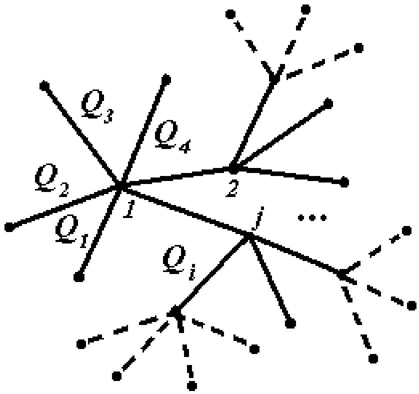

Рис. 1. Часть ГС, состоящей из N участков; Q_i — расход жидкости на i-м участке; j = 1,…,L, L — количество узлов в ГС

В качестве внутренних узлов могут использоваться тройники, коллекторы и смесительные камеры, в которых происходит соединение или разделение потоков. Внешними узлами (их число $L — L'$) являются концы участков, через которые имеется поток среды, поступающей в рассматриваемую ГС или покидающей её. Будем предполагать, что жидкость несжимаемая, течение напорное, одномерное, тогда нестационарное течение жидкости в отдельном участке, являющемся основной частью ГС, описывается уравнением Бернулли для неустановившегося потока, рассматриваемого в гидравлическом приближении [6]:

$$\dot{Q}_i \rho \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{1}{S_i(x)} dx = P_{i1} - P_{i2} + \rho g (z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i(Q_i),$$
$$\Delta P_i(Q_i) = \Delta P_i'(Q_i) - \rho \frac{Q_i^2}{2} \left(\frac{1}{S_{i1}^2} - \frac{1}{S_{i2}^2} \right), \ i = \overline{1, \mathrm{N}}, \qquad (1)$$

где Q_i — объемный расход жидкости в i-том участке; ρ — плотность; x — координата вдоль оси участка; P_{ik}, S_{ik}, z_{ik} – соответственно давление, площадь сечения прохода и высота центра сечения прохода на входе (k = 1) и выходе (k = 2) участка; $\Delta P_i(Q_i)$ — суммарная гидравлическая характеристика участка с учетом потерь на трение $\Delta P_i'(Q_i)$ и разности скоростных напоров на концах; g — ускорение силы тяжести; точка обозначает дифференцирование по времени.

В этом уравнении можно учитывать не только гидравлические сопротивления $\Delta P_i'(Q_i)$ и разности скоростных напоров, как это сделано выше, но и работу насоса (если он имеется). В этом случае в суммарную характеристику ΔP_i войдет перепад давления на насосе (характеристика насоса), зависящий от скорости вращения рабочего колеса ω_i.

Для каждого из внутренних узлов ГС имеет место уравнение неразрывности:

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{M}_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1, \mathrm{L}'}, \qquad (2)$$

где M_k — общее число соединяющихся в k-ом узле участков. Расход считается положительным, если жидкость поступает в узел. Во внешних узлах должны быть заданы либо расходы среды, либо давления, которые могут быть фиксированными или представлять собой известные функции времени. В случае замкнутой ГС внешних узлов нет. Случай, когда в системе имеются внешние узлы, является частным и рассматривается аналогично проведённому ниже, поэтому будем считать, что L = L'.

Таким образом, математическая модель динамики ГС при сделанных предположениях в общем случае примет вид:

$$\begin{aligned} &\tau_i \dot{Q}_i = (P_{i1} - P_{i2}) + \rho g(z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i(Q_i, \omega_i),\ i = \overline{1, \mathrm{N}};\\ &\sum_{j=1}^{\mathrm{M}_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1, \mathrm{L}};\\ &\mathrm{J}_i \dot{\omega}_i = M'_i(\omega_i) - M''_i(Q_i, \omega_i), \quad i = \overline{1, \mathrm{N}_1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\tau_i = \rho \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{dx}{S_i(x)};\ \Delta P_i(Q_i, \omega_i) = \Delta P'_i(Q_i) + \Delta P''_i(Q_i, \omega_i) -$$

$$-\rho \frac{Q_i^2}{2}\left(\frac{1}{S_{i1}^2(x_{i1})} - \frac{1}{S_{i2}^2(x_{i2})}\right),\ i = \overline{1, \mathrm{N}};\ \Delta P''_i(Q_i, \omega_i)$$ – характеристика насоса на участке; $\Delta P_i(Q_i, \omega_i)$ — полная суммарная гидравлическая характеристика участка; $M'_i(\omega_i)$ — движущий момент; $M''_i(Q_i, \omega_i)$ — момент сопротивления; J_i — момент инерции рабочего колеса насоса и вращающихся элементов, связанных с ним механически.

Последняя группа уравнений в системе (3) служит для нахождения угловых скоростей вращения рабочих колес насосов ω_i соответствующих участков. В число первых N уравнений системы (3) входят также участки, не содержащие насосов. Для каждого из таких участков ω_i отсутствует, и в суммарную гидравлическую характеристику такого участка перепад давления на насосе не входит. Число дифференциальных уравнений для ω_i равно числу участков с насосами N_1 ($N_1 \le N$).

Как и в большинстве работ, будем считать, что скорости вращения рабочих колес насосов ω_i постоянны. Фактически, если не рассматривается только задача статики, это связано либо с предположением о наличии идеального регулятора оборотов, либо со значительным различием характерных временных масштабов гидродинамических и механических процессов [3]. В этом случае система (3) описывает только гидродинамические процессы и имеет вид:

$$\begin{aligned} &\tau_i \dot{Q}_i = (P_{i1} - P_{i2}) + \rho g (z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i(Q_i),\ i = \overline{1, N}; \\ &\sum_{j=1}^{M_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1, L}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta P_i(Q_i)$ — суммарная гидравлическая характеристика соответствующего участка. Порядок системы уравнений (4), равный числу независимых переменных ($N - \tilde{L}$), определяет размерность фазового пространства. Здесь $\tilde{L} \le L$ — ранг матрицы уравнений связи, среди которых могут быть уравнения-следствия.

Рассматриваемая в большинстве работ задача потокораспределения сводится к численному решению уравнения (4) при $\dot{Q}_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$. Численное решение такой задачи порождает проблему выбора метода расчёта, начального приближения и сходимости итерационного процесса. При этом остаются в стороне проблемы множественности состояний равновесия, устойчивости системы и существования автоколебаний.

Исследование устойчивости и качественной структуры фазового пространства переменных $Q_i, i = \overline{1, N}$

Умножим каждое из N первых уравнений системы (4) на $\dot{Q}_i$ и, просуммировав по i, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\tau_i\dot{Q}_i^2=\sum_{j=1}^{L}(P_j-\rho g z_j)\sum_{s=1}^{M_j}\dot{Q}_s-\sum_{i=1}^{N}\dot{Q}_i\Delta P_i(Q_i)\,, \tag{5}$$

где M_j — количество участков, соединяющихся в j-ом узле. Каждое P_j и z_j, $j = 1,..,L$ входит в систему (4) столько раз, сколько участков соединяется в узле j. С учетом второй группы уравнений системы (4) уравнение (5) приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{N}\tau_i\dot{Q}_i^2=-\sum_{i=1}^{N}\dot{Q}_i\Delta P_i(Q_i). \tag{6}$$

Левая часть выражения — положительная функция, обращающаяся в нуль в состояниях равновесия системы, а в правой части — взятая со знаком «минус» полная производная по времени некоторой образующей функции, определённой с точностью до постоянного слагаемого C_1. Эту функцию можно назвать обобщенной функцией Релея, которая, с учетом связей, будет иметь вид:

$$R\left(Q_1,\ldots,Q_n\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^{Q_i}\Delta P_i(\xi)d\xi+C_1,\ n=N-\tilde{L}. \tag{7}$$

Система уравнений (4) может быть представлена также в виде уравнений Лагранжа с интегрируемыми связями между обобщенными скоростями. В качестве этих скоростей выбираются расходы Q_i, $i=\overline{1,N}$. Эти уравнения имеют частный вид [3]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial Q_i}=-\frac{\partial R}{\partial Q_i},\quad i=\overline{1,n},\quad T=\sum_{i=1}^{N}\frac{\tau_i Q_i^2}{2}, \tag{8}$$

T — кинетическая энергия системы, учитывающая движение жидкости во всех N участках системы. Избыточные переменные в (8) исключены с помощью независимых уравнений связи. Уравнения (8) не содержат обобщенных координат, которые являются скрытыми и в явном виде в уравнения не входят. Вывод и анализ уравнений динамики ГС проводятся с помощью методов аналитической механики и нелинейной теории колебаний. Полученные ниже результаты являются фактически следствием такого представления [3]. При необходимости к уравнениям (8) для расходов могут быть добавлены записанные в аналогичном виде уравнения для угловых скоростей центробежных насосов, от которых зависят гидравлические характеристики участков с насосами. И при исследованиях могут быть учтены и изменения режимов работы насосов [7].

Для исследования устойчивости системы (4) используется прямой метод Ляпунова [8], где в качестве функции Ляпунова выбирается функция $R(Q_1,\ldots,Q_n)$. Из (6) и (7) имеем:

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \tau_i \dot{Q}_i^2 = -\frac{dR\left(Q_1,\ldots,Q_{\mathrm{n}}\right)}{dt}, \mathrm{n} = \mathrm{N} - \tilde{\mathrm{L}}. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию R. Как уже было сказано выше, функции ΔP_i представляют собой суммарные гидравлические характеристики соответствующих участков системы. Аналитические выражения этих функций для участка без насоса и с насосом имеют следующий вид [9, 3]:

$$\Delta P_i(Q_i) = \begin{cases} d_1 Q_i^{\,2}, & Q_i \geq 0; \\ -d_2 Q_i^{\,2}, & Q_i < 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$-\Delta P_i(Q_i, \omega_i) = \begin{cases} -a_1 Q_i^{\,2} + b\omega_i Q_i + c\omega_i^{\,2}, & Q_i \geq 0; \\ a_2 Q_i^{\,2} + b\omega_i Q_i + c\omega_i^{\,2}, & Q_i < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где d_1, d_2, a_1, a_2, b, c — положительные коэффициенты, вид которых зависит от гидравлических сопротивлений участков и гидравлических характеристик насосов. Качественный вид графиков характеристик участков без насоса и с насосом представлен соответственно на рисунке 2 [9, 3, 5].

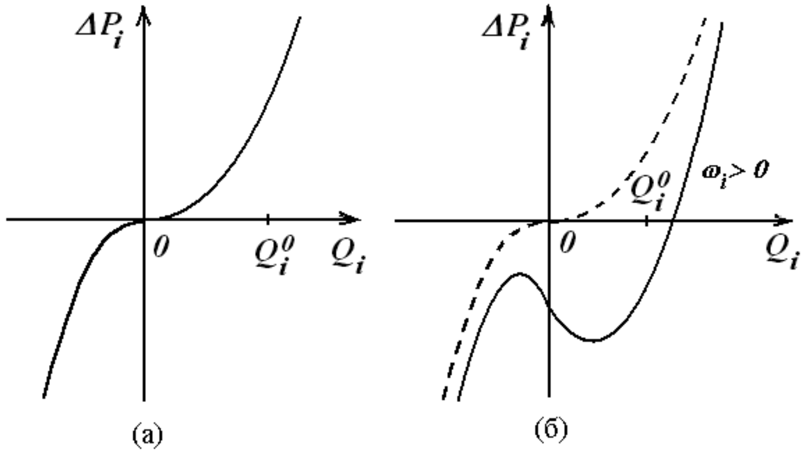

Рис. 2. Качественный вид гидравлических характеристик участков без насоса (а) и с насосом (б)

Функция R ограничена снизу и неограниченно растет при удалении от начала координат, поскольку каждое слагаемое, входящее в выражение (7) для этой функции, также ограничено снизу и неограниченно растет с ростом модуля аргумента Q_i. Это следует из соответствующих выражений (10), (11) (см. также рис.2.). Константу C_1 в (7) можно выбрать исходя из условия $R(Q_1^0,\ldots,Q_n^0)=0$, где $Q_1^0,\ldots,Q_n^0$ — некоторое значение переменных, при которых R имеет минимум. Таких минимумов у функции R может быть несколько.

Из выражения (9) видно, что $\dot{R}$ — отрицательно определённая функция, которая обращается в нуль в состояниях равновесия исходной системы (4). На основании теорем прямого метода Ляпунова и свойств функций R и $\dot{R}$ в нашем случае можно утверждать, что система (4) диссипативна [8, 10], то есть все движения независимо от начальных условий заканчиваются в одном из устойчивых состояний равновесия, в которых R имеет минимум. Таким образом, все фазовые траектории идут из бесконечности в некоторую ограниченную область, в которой находится либо одно устойчивое состояние равновесия, и тогда R имеет единственный минимум, либо несколько состояний равновесия (устойчивые и неустойчивые), в этом случае R имеет несколько минимумов.

Согласно геометрической трактовке прямого метода Ляпунова [8], имеем систему вложенных друг в друга гиперповерхностей R = const. Фазовые траектории пересекают эти гиперповерхности снаружи внутрь, т.к. производная от используемой функции Ляпунова, вычисленная с учетом уравнений движения, отрицательна всюду, кроме состояний равновесия. При наличии нескольких состояний равновесия имеются неустойчивые состояния равновесия типа седла, и сепаратрисные гиперповерхности, проходящие через эти состояния равновесия, разделяют фазовое пространство на области притяжения устойчивых состояний равновесия. В окрестности каждого из устойчивых состояний равновесия функция Релея может быть аппроксимирована поверхностью, представляющей собой многомерный эллиптический параболоид, то есть функция R может быть представлена в виде ряда в окрестности каждого из состояний равновесия $\bar{Q}^0 = (Q_1^0, \ldots, Q_\mathrm{n}^0)$:

$$R(Q_1,\ldots,Q_\mathrm{n}) = R(Q_1^0,\ldots,Q_\mathrm{n}^0) + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \left.\frac{\partial R}{\partial Q_i}\right|_{\bar{Q}^0} \left(Q_i - Q_i^0\right) + \\ + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \left.\frac{\partial^2 R}{\partial Q_i \partial Q_j}\right|_{\bar{Q}^0} \left(Q_i - Q_i^0\right)\left(Q_j - Q_j^0\right) + \ldots \qquad (12)$$

Первое слагаемое в выражении (12) можно обратить в нуль за счет выбора C_1 в выражении (7). В каждом состоянии равновесия первая сумма в разложении (12) обращается в нуль. Таким образом, функция R в малой окрестности точки минимума, соответствующей устойчивому состоянию равновесия, может быть аппроксимирована второй суммой ряда (12). В этом случае должны выполняться условия, соответствующие условиям минимума функции R в точке $\bar{Q}^0$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 R}{\partial Q_i \partial Q_j}\right|_{\bar{Q}^0} > 0,\ i, j = \overline{1, n}\,. \tag{13}$$

Таким образом, задача нахождения стационарного потокораспределения произвольной ГС без объёмов со свободными уровнями может быть сведена к поиску минимумов функции многих переменных R. Для этого могут быть использованы современные методы и алгоритмы принятия оптимальных решений [11]. В отличие от уже упомянутых традиционных методов решения проблемы стационарного потокораспределения, описанный выше подход даёт возможность исследования не только статики, но и динамики ГС, что очень важно для обоснования надёжности их работы. В частности, рассмотрение поверхности R = C, проходящей через ближайшее неустойчивое состояние равновесия, позволяет грубо оценить область притяжения каждого из устойчивых состояний равновесия, а необходимость обеспечения единственности состояния равновесия, гарантирующая его устойчивость в целом, может служить критерием выбора гидравлических характеристик участков системы и насосов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-08-50187а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Меренков А.П. Теория гидравлических цепей. — М.: Наука, 1985. — 230 с.
2. Геометрические методы в теории гидравлических цепей / С.Г. Валюхов [и др.]. — Воронеж: Воронеж. ун-т, 1999. — 126 с.
3. Смирнов Л.В. Математические модели динамики и устойчивость систем принудительной циркуляции теплоносителя. — М.: Энергоатомиздат, 1992. — 128с.

4. Смирнов Л.В. Системы Гельмгольца в прикладной гидромеханике // Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. — Вып. 1 (20). — С. 33–41.
5. Смирнов Л.В. Аналитическое исследование динамики гидромеханических процессов в ядерном реакторе // Вестник ННГУ. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. — Вып. 2 (21). — С. 34–43.
6. Чугаев Р.Р. Гидравлика. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 490 с.
7. Кассина Н.В., Смирнов Л.В. Влияние изменения работы ГЦН на режим работы ядерного реактора // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов, 2004. — Вып.3. — С.71–78.
8. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 2001. — 395 с.
9. Степанов А.И. Центробежные и осевые насосы. — М.: Физматгиз, 1960. — 375 с.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
11. Современные методы принятия оптимальных решений / Р.Г. Стронгин [и др.]. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. — 189 с.

MATHEMATICALLY MODELLING BRUNCHED HYDRAULIC SYSTEMS

Kassina N. V., Smirnov L. V.

(Russia, Nizhny Novgorod)

Solving the problem of stationary stream distribution for an arbitrary volume-free hydrosystem with a free level can be reduced to determining the extremes of a multi-variable function. Rayleigh's function expressed in terms of the hydraulic characteristics of the parts of the system in question is used as such a function. The same function is Lyapounov's function when analysing the stability of the determined stationary operational modes of a hydrosystem using the direct Lyapounov's method.