АНАЛИЗ ОТКАЗОУТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ КОРПОРАТИВНОГО ТИПА

Коганов А. В., Сазонов А. Н.

(Россия, Москва)

Рассматриваются модели вычислительных сред (ВС), построенные в форме направленных графов с мечеными вершинами. Моделью задачи для ВС называется некоторый подграф этой среды. Под разрушением ВС понимается выделение некоторого собственного подграфа модели (РВС). Приводятся аналитические оценки математического ожидания времени отказа системы в зависимости от параметров графа ВС для специального класса ВС – корпоративных вычислительных систем.

1. Введение. На современном этапе развития производства и науки для автоматизации производства, проведения экспериментов, а также во многих других областях жизнедеятельности человека используются гетерогенные вычислительные системы, являющиеся набором, возможно, разнотипных узлов, соединенных между собой при помощи каналов передачи данных. Тип узла может быть определен как его способность выполнять некоторый набор действий. Так, на производстве тип узла может быть «конвейер», «устройство управления конвейером» и пр. В локальной вычислительной сети типы узлов могут быть «принтер», «процессор» и т.п. Таким образом, можно рассматривать обобщенную модель вычислительной среды (ВС) в форме направленного графа с помеченными вершинами. В такой модели метки (цвета) вершин будут типами узлов ВС, а дуги – односторонними каналами передачи информации. Степень детализации модели (что считать одним узлом, а что — разными) может зависеть от поставленной задачи, для которой создается модель.

На каждой ВС должны выполняться какие-то задачи. Каждая задача может занимать как один узел ВС, так и несколько. Таким образом, можно рассматривать модель задачи (МЗ), основанную на модели ВС (МВС). Модель задачи также будет направленным графом с помеченными вершинами. Причем если задача может быть выполнена на данной ВС, то модель этой задачи изоморфна некоторому подграфу МВС. Такой подграф МВС называется образом задачи.

В современных условиях ВС редко бывают однозадачными. Обычно на ВС одновременно решаются несколько задач. С учетом вышеизложенного, а также того, что вычислительная система обычно изменяется гораздо реже, чем обрабатываемые задачи, вводится понятие пакета задач. Пакетом задач (ПЗ) называется конечное множество моделей задач.

Компоненты вычислительных систем, как материальные объекты, могут выходить из строя. При выходе из строя одного или нескольких узлов ВС из модели ВС исчезают соответствующие узлы графа. Для моделирования отказов оборудования вводится понятие разрушения ВС. Под разрушением ВС понимается выделение некоторого собственного подграфа модели (РВС).

В случае частичного разрушения ВС возможна ситуация, когда выполнявшиеся ранее задачи смогут продолжить свою работу с использованием (если нужно) других узлов ВС. Перераспределением ресурсов для компенсации разрушения называется переназначение вершин задач на вершины РВС так, чтобы образ модели задачи на графе РВС был изоморфен исходному графу модели задачи. Такое перераспределение желательно выполнить для всего выполнявшегося до разрушения ПЗ. Отказом системы в результате разрушения на данном ПЗ называется ситуация, когда невозможно перераспределение всех задач пакета на РВС.

Обращаясь к природе узла графа РВС как узла ВС, можно немного модифицировать задачу. Предположим, что в графе задачи есть несколько соседних одноцветных вершин, последовательно связанных друг с другом. В этом случае можно распределять эти вершины на одну и ту же вершину графа РВС, предполагая, что локальные пересылки данных (на одном и том же узле РВС) всегда возможны. Поэтому образом нескольких вершин графа задачи может быть одна и та же вершина графа РВС. Такую ситуацию будем называть *склейкой вершин графа задачи* или просто *склейкой*.

В данной работе описан специальный класс РВС – корпоративные системы. Для них найдены аналитические оценки математического ожидания времени отказа системы в условиях последовательных разрушений. Предложенный метод расчета не годится для более общих классов РВС, где требуется численное моделирование.

2. Корпоративные вычислительные системы

2.1. Определение корпоративной ВС

Модель. Корпоративная вычислительная система (КВС) — это частный случай распределенной вычислительной системы (РВС). В графе КВС вершины образуют полный граф, что дает возможность получить аналитические оценки. Для графа КВС задаются следующие параметры:

$C+1$ — число цветов вершин: $c_0,\ldots,c_C$.
$m(j)$ — число вершин цвета c_j , $j=0,...,C$.

Разрушение ПВС проводится испытанием Бернулли, путем удаления из графа каждой вершин и инцендентных ей ребер с некоторой вероятностью Pd. Каждая планета, а также звезда удаляется из графа в случае, если случайный эксперимент с вероятностью успеха Pd окончился успехом.

Модель разрушения. Каждый шаг разрушения КВС проводится испытанием Бернулли по вершинам графа КВС, где каждая вершина с заданной вероятностью может получить статус «разрушена» независимо от остальных вершин. Разрушенная вершина удаляется из графа и уже не участвует в дальнейших шагах разрушения.

Обозначим p — вероятность разрушения любой вершины сети в испытании Бернулли по вершинам графа на одном шаге итерации разрушения.

Модель задачи. В качестве графа модели задачи выбираются подграфы КВС.

Пакетом задач называется конечное множество задач.

Полный пакет задач — допустимый пакет, в котором имеются вершины всех цветов.

Отказом КВС (*Корпоративным отказом*) на пакете задач называется отсутствие в КВС подграфа, куда можно вложить некоторую задачу из пакета (отсутствие образа некоторой задачи на разрушенном графе КВС). Рассматриваемая постановка задачи допускает склейки, и, следовательно, отсутствие образа задачи на разрушенном графе КВС означает, что во всей КВС отсутствует вершина некоторого цвета, который присутствует в пакете задач.

2.2. Аналитический расчет характеристик корпоративного отказа для полного пакета задач

Для любой вершины исходного графа КВС вероятность сохраниться на t-м шаге разрушения равна

$$(1-p)^t, \tag{2.1}$$

а вероятность исчезнуть после t шагов разрушения равна соответственно

$$p(t) = 1-(1-p)^t; \tag{2.2}$$

причем эти вероятности независимы для разных вершин исходного графа.

Корпоративный отказ на полном пакете задач не происходит на шаге t, если на этом шаге разрушения графа присутствуют вершины всех цветов. Для вершин цвета j эта вероятность равна

$$\mathrm{P_j}(t) = 1 - p(t)^{m(j)}. \tag{2.3}$$

Вероятность того, что время корпоративного отказа превосходит t , равна

$$P_{>}(t) = P_0(t) \cdot \ldots \cdot P_C(t)\,. \tag{2.4}$$

Функция распределения времени корпоративного отказа

$$F(t) = 1 - P_{>}(t)\,. \tag{2.5}$$

Вероятность отказа точно на шаге t

$$f(t) = F(t) - F(t-1)\,. \tag{2.6}$$

Математическое ожидание времени отказа

$$E\{t\} = \sum\nolimits_{t=1\ldots\infty} P_{>}(t). \tag{2.7}$$

Подстановка (2.2)(2.3) в (2.4) дает:

$$P_{>}(t) = \prod_{j=0\ldots C} (1-(1-(1-p)^t)^{m(j)}) = \prod_{j=0\ldots C} \sum_{K=1\ldots m(j)} C_{m(j)}^{k} (1-p)^{kt} (-1)^{k+1}, \tag{2.8}$$

где C_m^k — число сочетаний из m по k.

Обозначим множество целочисленных векторов

$$K = \{(k(0),\ldots,k(C)) \big| k(j) = 1,\ldots,m(j);\, j = 0,\ldots,C\}, \tag{2.9}$$

$$\sigma(k) = k(0) + \ldots + k(C) \text{ для k из K.} \tag{2.10}$$

Тогда подстановка (2.8) в (2.7) дает

Теорема 1. *Математическое ожидание времени отказа корпоративной вычислительной системы на полном пакете задач определяется выражением*

$$\begin{aligned} E\{t\} &= \sum\nolimits_{t=1\ldots\infty} \sum\nolimits_{K} \Big(\prod_{j=0\ldots C} C_{m(j)}^{k(j)}\Big)(-1)^{\sigma(k)+C+1}(1-p)^{\sigma(k)t} = \\ &\sum\nolimits_{K} \Big(\prod_{j=0\ldots C} C_{m(j)}^{k(j)}\Big)(-1)^{\sigma(k)+C+1}(1-p)^{\sigma(k)}(1-(1-p)^{\sigma(k)})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Следствие. Для произвольного пакета задач корпоративной вычислительной системы математическое ожидание времени отказа определяется формулой (2.11) с другими параметрами: C — фактическое число цветов в пакете задач, j пробегает значения по фактическим цветам из пакета задач.

Утверждение 2.1. *Математическое ожидание времени корпоративного отказа КВС растет с ростом каждой компоненты m(j).*

Для любой компоненты m(j). Для остальных компонент оно аналогично. По (2.8)

$$P_>(t)\Big|_{m(j)=S} < P_>(t)\Big|_{m(j)=S+1}.$$

Тогда по (2.7)

$$E\{t\}\Big|_{m(j)=S} < E\{t\}\Big|_{m(j)=S+1}. \ \square$$

Утверждение 2.2. *При фиксированном количестве вершин КВС математическое ожидание времени корпоративного отказа убывает с ростом числа цветов C.*

Доказательство. Пусть

$$C' > C \text{ и } m'(0)+\ldots+m'(C') = m(0)+\ldots+m(C).$$

Далее, величины, относящиеся к КВС, которая имеет штрихованные параметры, будут помечаться штрихом. Тогда по (2.8)

$$P'_>(t) < P_>(t)$$

для всех t=1,…, поскольку при каждом t значение $P'_>(t)$ является произведением большего числа членов, каждый из которых меньше 1, и при том члены, соответствующие одинаковым индексам j, в штрихованном выражении меньше. Но тогда из (2.7) E'{t}<E{t}. □

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00363

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коганов А. В. Индукторные пространства как средство моделирования // Вопросы кибернетики (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование), 1999. — С. 119–181.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: «Мир», 1975.

FAULT-TOLERANCE ANALYZIS FOR COMPUTING ENVIRONMENT OF CORPORATIVE TYPE

Koganow A. V., Sazonov A. N.

(Russia, Moscow)

Computing environment models (CEM), represented by oriented graphs with typed vertices are examined. The model of the task is a sub graph of the graph mentioned. The CEM destruction is its sub graph separation. The analytic assesses for dependencies between the failure time (task's image unavailability) and graph's parameters are given for special CEM class – Corporative Computing Environment Model.