

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ВНУТРЕННИМИ РЕЗОНАНСАМИ

Культина Н. Ю.

(Россия, Нижний Новгород)

На простой механической модели проводится исследование явления взрывной неустойчивости систем с внутренними резонансами. Определяются необходимые условия возникновения взрывной неустойчивости и указываются малые параметры, оказывающие существенное влияние на динамику системы. Результаты исследования могут иметь отношение к задачам устойчивости нагруженных тонких оболочек и панелей.

Рассматривается дискретная колебательная система, состоящая из двух точечных масс m , соединённых безмассовыми стержнями длины l (рис. 1). В местах соединения стержней присутствует линейно-упругий восстанавливающий момент. Массы соединены с вертикальной опорой пружинами, которые предполагаются нелинейными. Нижний конец системы шарнирно закреплён, к верхнему приложена следящая сила T . Состояние системы при отсутствии нагрузки показано на рис. 1 пунктиром. В ненагруженном состоянии система имеет малое начальное отклонение от вертикали: $\varphi_0 \ll 1$. Сила тяжести в расчет не принимается.

Отклонения системы от положения равновесия характеризуются углами φ_1, φ_2 .

После перехода к безразмерным переменным и параметрам с помощью уравнений Лагранжа второго рода получаются уравнения движения системы в отклонениях от состояния равновесия:

$$\begin{aligned}
 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\varphi_1 - \varphi_2 + \chi(2\varphi_1 + \varphi_2) - \tau(\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{10} - \varphi_{20} - \varphi_0)^2 - \\
 \ddot{\varphi}_2^2(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{10} - \varphi_{20} - \varphi_0) + \chi_1\left((\varphi_1 + \varphi_{10})^2 + (\varphi_1 + \varphi_{10})(\varphi_2 + \varphi_{20}) + \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_{20})^2\right) - \\
 \frac{\tau}{2}\left((\varphi_0 + \varphi_{20} - \varphi_{10})(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_0 + \varphi_{20} - \varphi_{10})^2(\varphi_2 - \varphi_1)\right) & \quad (1) \\
 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 - \varphi_1 + \chi(\varphi_1 + \varphi_2) &= \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{10} - \varphi_{20} - \varphi_0)^2 + \\
 \ddot{\varphi}_1^2(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_{10} - \varphi_{20} - \varphi_0) + \chi_1\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_{10})^2 + (\varphi_1 + \varphi_{10})(\varphi_2 + \varphi_{20}) + \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_{20})^2\right) .
 \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ — состояние равновесия системы. В качестве мас-

штаба времени принята величина $t_* = \sqrt{\frac{ml^2}{c}}t$ и введены следую-

щие обозначения для безразмерных параметров: $\chi = \frac{kl^2}{c}$,

$\chi_1 = \frac{k_1l^2}{c}$, $\tau = \frac{Tl}{c}$, где k, k_1 — линейная и нелинейная характери-

стики пружин, соединяющих массы с вертикальной опорой, и c — коэффициент упругости в местах шарнирного закрепления стержней.

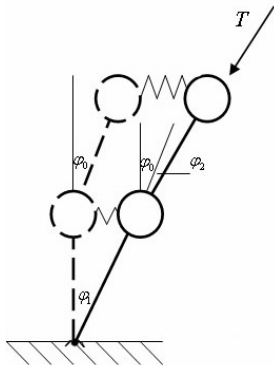


Рис. 1. Двойной маятник под действием следящей нагрузки

Уравнения движения в отклонениях от состояния равновесия (1) записаны с учётом квадратичных по отклонениям членов, членами более высокого порядка можно пренебречь в силу малости.

По линейной модели системы определяются собственные частоты колебаний. На рис. 2 представлена зависимость собственных частот от нагрузки при значении параметра $\chi = 1,5$.

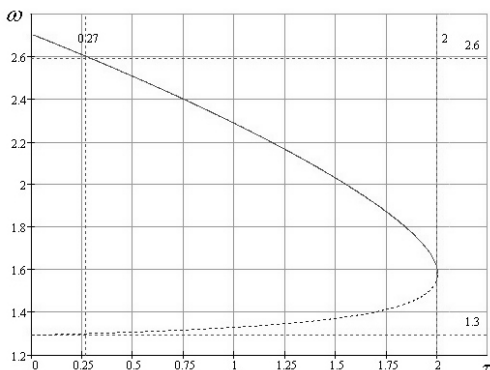


Рис. 2. Спектр частот двойного маятника, нагруженного следящей силой

Линейная модель даёт значение нагрузки, отвечающее нарушению консервативной устойчивости системы. Это нагрузка, при которой происходит слияние собственных частот – динамическая неустойчивость ($\tau = 2$ на рис. 2). Если ограничиваться рассмотрением линейной модели, то вывод относительно устойчивости системы будет такой: при нагрузках, меньших $\tau = 2$, имеет место консервативная устойчивость.

В системе при $\tau = 0,27$ присутствует внутренний резонанс, собственные частоты связаны соотношением: $\omega_1 = 2\omega_2$. Оказывается, в условиях внутреннего резонанса система может потерять устойчивость взрывным образом. Чтобы показать это, рассмотрим нелинейную модель системы с учётом внутреннего резонанса.

После перехода в уравнениях движения (1) к нормальным координатам, применения метода усреднений и перехода от комплексных переменных к действительным получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд a_1, a_2 и фазы колебаний ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\eta} &= 0,94\varphi_0 a_2^2 \sin\phi, \\ \frac{da_2}{d\eta} &= 1,19\varphi_0 a_1 a_2 \sin\phi, \\ \frac{d\phi}{d\eta} &= \left(2,38\varphi_0 a_1 + 0,94\varphi_0 \frac{a_2^2}{a_1} \right) \cos\phi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\eta = \varepsilon t$ — медленное время, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

При выводе уравнений (2) пружины приняты линейными ($\chi_1 = 0$). В дальнейшем будет показано, что нелинейная составляющая жёсткости пружин χ_1 не существенна для устойчивости системы.

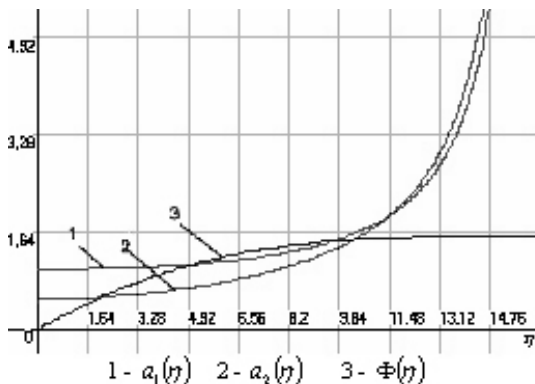


Рис. 3. Графики численного решения системы (2)

Исследовать систему (2) аналитически не удаётся, численное решение даёт качественную картину поведения функций a_1, a_2 и ϕ при различных значениях параметров. Результаты численного исследования привели к следующим выводам: при произвольных начальных условиях функция ϕ стремится к постоянному значению $\phi = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=1,2,\dots$, тогда как амплитуды a_1, a_2 возрастают до бесконечности за конечный отрезок времени, что показывает на взрывную неустойчивость системы (рис. 3).

Такое поведение функции ϕ даёт возможность исследовать упрощённую систему в предположении, что $\phi = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=1,2,\dots$,

$\frac{d\phi}{d\eta} = 0$. В этом случае третье уравнение (2) выполняется тождественно, и система (2) переходит к двум уравнениям для амплитудных функций a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\eta} &= g_1 a_2^2, \\ \frac{da_2}{d\eta} &= g_2 a_1 a_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $g_1 = 0,94\varphi_0$, $g_2 = 1,19\varphi_0$.

Для упрощённой системы (3) удаётся аналитически показать возможность возникновения взрывной неустойчивости, когда амплитудные функции возрастают до бесконечности за конечное время. Приведём решения системы (3) в зависимости от начальных условий a_{01}, a_{02} . Уравнения (3) допускают следующий интеграл: $g_2 a_1^2 - g_1 a_2^2 = C_0$, где $C_0 = g_2 a_{01}^2 - g_1 a_{02}^2$.

При $C_0 > 0$ решение системы (3) имеет вид:

$$a_1 = \sqrt{\frac{C_0}{g_2}} \frac{e^{2\sqrt{C_0 g_2}(C-\eta)} + 1}{e^{2\sqrt{C_0 g_2}(C-\eta)} - 1}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{C_0}{g_1}} \frac{2e^{2\sqrt{C_0 g_2}(C-\eta)}}{e^{2\sqrt{C_0 g_2}(C-\eta)} - 1},$$

где

$$C = \frac{1}{2\sqrt{C_0 g_2}} \ln \left(\frac{\sqrt{C_0 g_2} + g_2 a_{01}}{\sqrt{C_0 g_2} - g_2 a_{01}} \right),$$

причём $C > 0$ для $a_{01} > 0$.

Отсюда следует, что при $\eta \rightarrow C$ значения функций $a_k \rightarrow \infty$, $k=1,2$, следовательно, за конечное время амплитуды a_k неограниченно нарастают.

В случае $C_0 < 0$ решение системы (3) запишется следующим образом:

$$a_1 = \sqrt{\frac{C_0}{g_2}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{|C_0 g_2|} (C - \eta) \right), \quad a_2 = \sqrt{\frac{C_0}{g_1}} \frac{\sqrt{\cos \left(2\sqrt{|C_0 g_2|} (C - \eta) \right)}}{\cos \left(\sqrt{|C_0 g_2|} (C - \eta) \right)},$$

где $C = \frac{1}{\sqrt{|C_0 g_2|}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{g_2}{C_0}} a_{01} \right)$, причём $C > 0$ для $a_{01} > 0$.

Отсюда заключаем, что при $\eta \rightarrow C - \frac{\pi}{2\sqrt{|C_0 g_2|}}$ функции $a_k \rightarrow \infty$,

т.е. имеет место взрывная неустойчивость.

В случае $C_0 = 0$ решение системы (3) имеет вид:

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_{01}} - g_2 \eta}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \frac{1}{\frac{1}{a_{01}} - g_2 \eta}.$$

Из этих выражений следует, что при $\eta \rightarrow \frac{1}{g_2 a_{01}}$ функции $a_k \rightarrow \infty$, что также указывает на взрывную неустойчивость.

Итак, непосредственным интегрированием системы (3) показывается, что в исследуемой модели позиционная неконсервативная нагрузка и внутренний резонанс приводят к потере устойчивости взрывным образом.

Учёт нелинейности пружин, связывающих массы с вертикальной опорой, не меняет качественного характера поведения амплитуд и фазы, в то время как учёт малого начального отклонения φ_0 существенно важен при исследовании устойчивости. Если учесть нелинейные характеристики пружин χ_1 , но отбросить начальное отклонение ($\varphi_0 = 0$), после чего провести все преобразования, аналогично сделанным выше, то в результате получается следующая система уравнений для амплитуд a_1, a_2 и фазы ϕ :

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{d\eta} &= 0,07\chi_1 a_2^2 \sin\phi, \\ \frac{da_2}{d\eta} &= -0,05\chi_1 a_1 a_2 \sin\phi, \\ \frac{d\phi}{d\eta} &= -\chi_1 \left(0,1a_1 + 0,07 \frac{a_2^2}{a_1} \right) \cos\phi.\end{aligned}\tag{4}$$

Из первых двух уравнений (4) следует интеграл:

$$0,025a_1^2 + 0,035a_2^2 = \text{const},$$

указывающий на устойчивость системы при сделанных предположениях.

При отсутствии начального отклонения внутренний резонанс приводит лишь к перераспределению энергии между фор-

мами колебаний и не оказывает качественного влияния на динамику системы.

Показано, что в рассматриваемой механической системе, находящейся под действием позиционной неконсервативной силы, в условиях внутреннего резонанса при учёте малого начального отклонения возникает взрывная неустойчивость. Это явление наблюдается и в случае потенциальной силы [1].

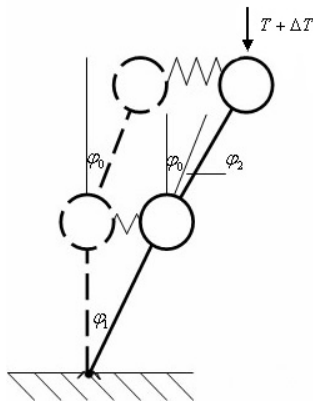


Рис. 4. Двойной маятник под действием силы постоянного направления

Исследование динамики механической системы, нагруженной силой постоянного направления $T + \Delta T$ (рис. 4), в условиях внутреннего резонанса, приводит к выводу, что на устойчивость системы наряду с учётом малого начального отклонения ϕ_0 , существенно сказывается учёт малой неконсервативной добавки к нагрузке ΔT . Численный анализ уравнений движения в этом случае даёт качественную картину поведения амплитуд и фазы колебаний, сходную с картиной, полученной для случая следящей нагрузки (рис. 3). Определяется область значений параметров системы, при которых возникает взрывная неустойчивость:

$$1,42h < \operatorname{tg} \phi_0 < 1,86h .$$

Здесь ϕ_0 — предельное значение, к которому стремится фаза колебаний ϕ при неограниченном нарастании амплитуд, h — параметр, характеризующий малую неконсервативную добавку к силе ΔT .

Как и в случае следящей силы, при силе постоянного направления взрывная неустойчивость наблюдается при нагрузках, существенно меньших критических нагрузок, определяемых по линейной модели.

Проведённое исследование имеет приложение к задачам устойчивости нагруженных тонких оболочек и панелей [2]. Объекты данного класса характеризуются чувствительностью к малым несовершенствам, к малому внешнему неконсервативному воздействию при их нагружении и наличием внутренних резонансов. Для распределённых систем условие внутреннего резонанса имеет вид: сумма двух собственных частот даёт третью частоту, и это же условие должно выполняться для собственных форм колебаний, соответствующим частотам.

Задача об устойчивости оболочки в условиях внутреннего резонанса сложна, в этом случае не удаётся найти аналитических решений для амплитудных функций. Однако численное исследование позволяет сделать вывод, что качественное поведение амплитуд и фазы колебаний не отличается от поведения амплитуд и фазы исследованной модели.

В предложенной работе рассматривается система с внутренним резонансом вида $\omega_1 = 2\omega_2$, так как что для неё можно провести детальный анализ возникновения взрывной неустойчивости, указать условия, при которых имеет место это явление и выделить существенные малые параметры, отвечающие за динамику системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Г.Г., Кульпина Н.Ю., Новиков В.В. О взрывной неустойчивости механических систем // Вестник ННГУ. Механика, 2004. — Вып. 1. — С. 5–12.

2. Новиков В.В. О неустойчивости упругих оболочек как проявлении внутреннего резонанса // Прикладная математика и механика, 1988. — Т. 52. — Вып. 6. — С. 1022–1029.

ON DYNAMICS OF SYSTEMS WITH INTERNAL RESONANCES

Kultina N. Yu.

(Russia, Nizhniy Novgorod)

The effect of explosive instability of systems with internal resonances is researched on a simple mechanical model. The necessary conditions of arise of explosive instability are determined and small parameters which have an impact on system dynamics are showed. The results of research refer to problems of stability of loaded thin shells and panels.