НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФОРМАЛИЗАЦИЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ КОМПЬЮТЕРА

Аристов В. В., Строганов А. В.

(Россия, Москва)

В работе демонстрируется возможность представления решения дифференциального уравнения в виде отрезков ряда по степеням шага независимой переменной. При этом используется сворачивание промежуточных операций в аппроксимирующей разностной схеме, трактуемой как рекуррентная формула. На основе руководящей аналогии с работой ЭВМ с применением вероятностных методов получен явный вид решения. Подход иллюстрируется решением некоторых нелинейных уравнений.

Введение. Численное решение дифференциального уравнения может быть получено с помощью устойчивой, аппроксимирующей и, следовательно, сходящейся конечно-разностной схемы. Если рассматривать разностную схему как рекуррентную формулу, то можно поставить вопрос: нельзя ли, сворачивая промежуточные слои по времени (так будем называть для краткости независимую переменную), сократить существенно требуемые операции? Более того, можно попытаться найти решение в виде отрезков сходящегося ряда по степеням шага по времени. Для этого будем опираться на руководящую аналогию с работой цифрового компьютера, где используется ограниченная разрядная сетка, а также производится «переброс из разряда в соседний разряд» для сохранения представления числа в виде сходящегося степенного ряда (в двоичной системе в любом разряде число должно быть меньше 2, в десятичной – меньше 10 и т.д.). Попытаемся, формализуя действия компьютера, перейти от арифметических операций с числами к алгебраическим операциям. По аналогии с представлением числа в компьютере будем использовать ограниченное количество членов ряда. Потребуем, чтобы при отбрасывании на каждом шаге остаточных членов не нарушался порядок точности данной разностной формулы. Тогда решение представляется в виде отрезка сходящегося степенного ряда, имеющего число членов, связанное с характером нелинейности уравнения. В результате получаем систему уравнений относительно коэффициентов ряда, где также присутствуют величины, «перебрасываемые» из разряда в ближайший разряд. Формализация процесса «переброса» требует определения целой (и дробной) части чисел, что вводит процедуры, аналогичные генераторам псевдослучайных чисел. Это позволяет говорить о вероятностном подходе и получать средние по времени значения величин. Вероятности величин, управляющих «перебросом», зависят от значений коэффициентов ряда. По этим вероятностям можно определить значения приращения по времени (число шагов по времени), задающих требуемое приращение коэффициентов, т.е. фактически строить обратную к искомой функцию. В результате получаем явный вид решения исходной задачи. Таким же способом можно изучать системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Основные черты метода. Будем пояснять подход на примере конкретных уравнений. Начнем с простого линейного уравнения. Задача Коши

$$\frac{dy}{dt} = y, \; y(0) = 1$$

имеет решение $y(t) = \exp(t)$. Для явной схемы Эйлера первого порядка (в работе для простоты применяем только эту схему)

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-1}\tau \, .$$

Будем использовать такие шаги по времени, чтобы схема Эйлера была устойчива. Тогда численное решение отличается от точного на величину первого порядка по шагу. Разностное решение представляется в виде:

$$y_n = y_0(1+\tau)^n = (1+\tau)^n = (1+t/n)^n.$$

Здесь мы полагаем, что $t = n\tau$. Решение представляется в виде отрезков степенного ряда. Причем коэффициенты стремятся к коэффициентам разложения в ряд экспоненты при стремлении шага к нулю и числа шагов к бесконечности (t фиксировано).
Рассмотрим нелинейные уравнения (квадратичная нелинейность характерна для многих физически важных уравнений). Для задачи Коши (Задача 1)

$$\frac{dy}{dt} = y^2,\ y(0) = 1,$$

имеющей аналитическое решение

$$y(t) = 1/(1-t).,$$

разностная схема записывается так:

$$y_n = y_{n-1} + y^2{}_{n-1}\tau. \tag{1}$$

Представляем решение отрезком степенного ряда. Удерживая члены до второй степени шага по времени τ, на n-ом шаге получаем

$$y_n = a_{0,n}\tau^0 + a_{1,n}\tau^1 + a_{2,n}\tau^2. \tag{2}$$

При использовании формулы (1) имеем

$$\begin{aligned} y_n &= a_{0,n-1}\tau^0 + a_{1,n-1}\tau^1 + a_{2,n-1}\tau^2 + \\ &+\tau(a_{0,n-1}\tau^0 + a_{1,n-1}\tau^1 + a_{2,n-1}\tau^2)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

При удерживании в (3) только членов второго порядка получим

$$y_n = a_{0,n-1}\tau^0 + (a_{1,n-1} + a^2{}_{0,n-1})\tau^1 + (a_{2,n-1} + 2a_{0,n-1}a_{1,n-1})\tau^2.$$

Отсюда следует, что

$$a_{0,n} = a_{0,n-1}\,,\ a_{1,n} = a_{1,n-1} + a^2{}_{0,n-1}\,,\ a_{2,n} = a_{2,n-1} + 2a_{0,n-1}a_{1,n-1}.$$

С учетом того, что $a_{0,0} = 1$; $a_{1,0} = 0$; $a_{2,0} = 0$, находим

$$a_{0,n} = 1,\ a_{1,n} = a_{1,n-1} + 1\ ,\ a_{2,n} = a_{2,n-1} + 2a_{1,n-1}.$$

Значит, $a_{1,n} = n$ и $a_{2,n} = a_{2,n-1} + 2(n-1)$. Используя выражение для суммы арифметической прогрессии, получаем $a_{2,n} = n(n-1)$.

Окончательно формула (2) принимает вид

$$y_n = 1 + n\tau^1 + n(n-1)\tau^2.$$

Можно вводить дополнительные степени шага по времени, увеличивая приближающий решение отрезок степенного ряда. При этом требуется находить суммы от степеней чисел натурального ряда (степень тем выше, чем большее берется приближение). В общем виде используется выражение сумм через числа (коэффициенты) Бернулли. Метод позволяет приближать численное решение (и тем самым решение исходного уравнения), но, чтобы обеспечить точность, необходимо при увеличении номера узла по времени увеличивать количество членов ряда. Это делает подход «без перебросов» сложным. В этом смысле интересно рассмотреть результат для аналогичного уравнения, но с убывающим по времени решением.

Задача Коши (Задача 2)

$$\frac{dy}{dt} = -y^2,\ y(0) = 1$$

имеет аналитическое решение $y(t) = 1/(1+t)$. Записывая приближения в указанном подходе, получим приближения решения на основе базовой схемы Эйлера. Причем вплоть до t~1 приближение приемлемо, но при больших *t* для конечного небольшого числа оставляемых членов происходит резкий отход от решения (рис.1). Характерно, что традиционное представление решения Задачи 2 разложением в ряд по степеням t дает:

$$y(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots,$$

что означает расходимость этого приближения при $t \geq 1$. В предлагаемом методе, где решение раскладывается в ряд по степеням шага времени, каждое новое добавление приближения дает некоторое уточнение, но в целом подход неэффективен при $t \geq 1$.

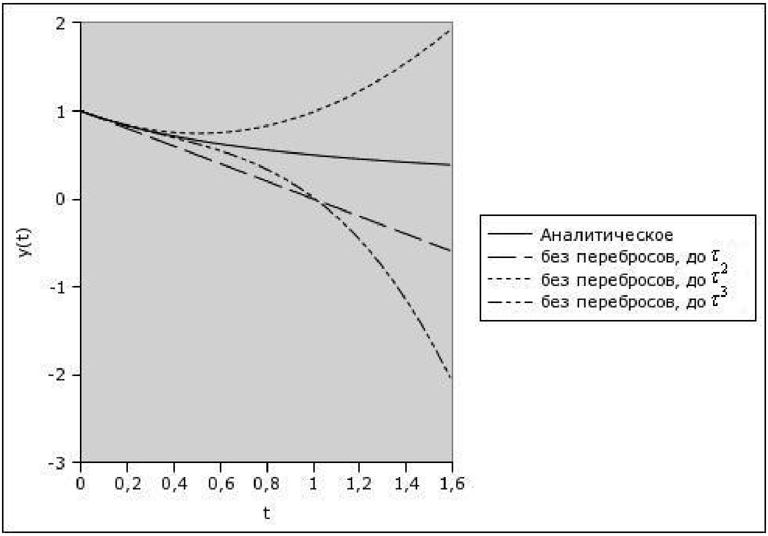

Рис. 1. Решения «без перебросов» при $\tau = 0.01$

Схема «с перебросами». Потребуем, чтобы в результате «переброса» коэффициенты степенного ряда были меньше, чем обратная величина к шагу (пусть эта величина – целое число). Рассмотрим приближение до третьей степени по шагу

$$y_n = a_{0,n}\tau^0 + a_{1,n}\tau^1 + a_{2,n}\tau^2 + a_{3,n}\tau^3, \tag{4}$$

где выполнены ограничения $a_{0,n,} a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n} \in [0;1/\tau),\ 0<\tau<1$. Это достигается процедурой перебросов, формализуемой так:

$$y_{n+1} = (a_{0,n} - \delta_{01,n+1})\tau^0 - (a_{1,n} + 1 - \delta_{12,n+1} - \frac{1}{\tau}\delta_{01,n+1})\tau^1 +$$

$$+(2a_{1,n} + a_{2,n} - \delta_{23,n+1} - \frac{1}{\tau}\delta_{12,n+1})\tau^2 -$$

$$-(a_{1,n}^2 + 2a_{2,n} + a_{3,n} - \frac{1}{\tau}\delta_{23,n+1})\tau^3,$$

где

$$\delta_{01,n+1} = [(a_{0,n}^2 + a_{1,n} - \delta_{12,n+1})\tau],\ \delta_{12,n+1} = [(2a_{0,n}a_{1,n} + a_{2,n} - \delta_{23,n+1})\tau],$$

$$\delta_{23,n+1} = [(2a_{0,n}a_{2,n} + a_{1,n}^2 + a_{3,n} - \delta_{12,n+1})\tau].$$

квадратные скобки обозначают целую часть (заметим, что при решении данной Задачи 2 отрезок ряда (4) удобно представлять как знакочередующийся).

Покажем, что для рассматриваемых уравнений с квадратичной нелинейностью для достижения сходимости к решению исходной задачи достаточно оставлять отрезок ряда с удержанием кубичного члена по шагу. При переходе на следующий слой по времени получим из (4)

$$y_{n+1} = a_{0,n}\tau^0 + a_{1,n}\tau^1 + a_{2,n}\tau^2 + a_{3,n}\tau^3 +$$

$$+\tau(a_{0,n}\tau^0 + a_{1,n}\tau^1 + a_{2,n}\tau^2 + a_{3,n}\tau^3)^2. \qquad (5)$$

Оставляя члены до третьего порядка, получим

$$y_{n+1} = a_{0,n+1}\tau^0 + a_{1,n+1}\tau^1 + a_{2,n+1}\tau^2 + a_{3,n+1}\tau^3 + \Delta_{n+1}, \qquad (6)$$

где коэффициенты на двух уровнях связаны так:

$$a_{0,n+1} = a_{0,n};\ a_{1,n+1} = a_{1,n} + a^2{}_{0,n};\ a_{2,n+1} = a_{2,n} + 2a_{0,n}a_{1,n}.$$

$$a_{3,n+1} = a_{3,n} + a^2{}_{1,n} + 2a_{0,n}a_{2,n}. \qquad (7)$$

Теперь может быть дана оценка остатка Δ_{n+1} с учетом указанных выше ограничений на коэффициенты

$$\Delta_{n+1} = 2a_{1,n}a_{2,n}\tau^4 + (a^2{}_{2,n} + 2a_{1,n}a_{3,n})\tau^5 + 2a_{2,n}a_{3,n}\tau^6 + a^2{}_{3,n}\tau^7.$$

Учитывая интервалы изменения коэффициентов, получим

$$\Delta_{n+1} < 2(\frac{1}{\tau})^2\tau^4 + ((\frac{1}{\tau})^2 + 2(\frac{1}{\tau})^2)\tau^5 + 2(\frac{1}{\tau})^2\tau^6 + (\frac{1}{\tau})^2\tau^7 =$$

$$= 2\tau^2 + 3\tau^3 + 2\tau^4 + \tau^5 < 3\tau^2(1+\tau+\tau^2+\tau^3) < 3\tau^2\frac{1}{1-\tau} < 6\tau^2$$

в предположении, что $\tau < 1/2$.

Значит, на каждом шаге в наше решение вносится (после отбрасывания остатка) ошибка порядка τ^2, но величину такого же порядка вносит используемая схема первого порядка по времени, следовательно, предложенный алгоритм с количеством членов согласно (4) позволяет добиться сходимости к решению исходной задачи с первым порядком точности. Если вместо (4) использовать приближение второго порядка по шагу, то аппроксимация исходного уравнения не достигается, хотя происходит выход на некоторое постоянное значение для разностного решения.

Оценим вклад различных членов в приближении (4). Рассмотрим вначале для простоты случай, когда нулевой коэффициент в (4) равен 1 (что соответствует решению Задачи 2). С учетом указанных ограничений на коэффициенты легко заметить, что основную роль в правой части играют первые два члена, а третий и четвертый стремятся к нулю, когда $\tau \to 0$. Согласно предыдущим рассуждениям эти члены, безусловно, нельзя отбрасывать, поскольку они вносят свой вклад в правильное приближение на каждом шаге к истинному решению. Причем поведение коэффициентов $a_{2,n}$, $a_{3,n}$ определяет «функции перебросов».

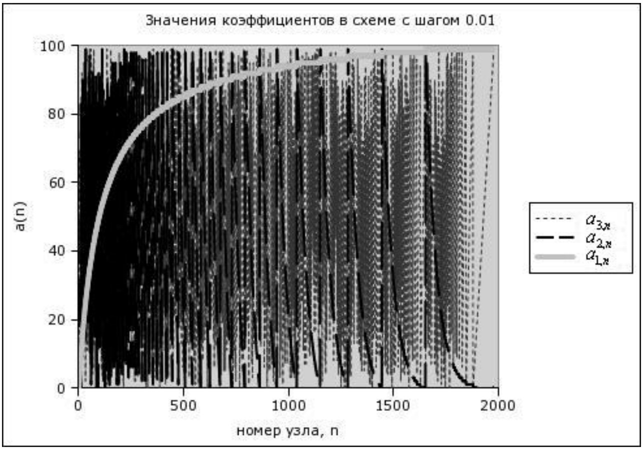

Рис. 2. Поведение коэффициентов $a_{1,n,}\ a_{2,n}, a_{3,n}$ при $\tau = 0.01$

На рис. 2 показано поведение коэффициентов $a_{1,n,}\ a_{2,n}$, $a_{3,n}$ в зависимости от номера слоя по времени. Видно, что $a_{2,n}$, $a_{3,n}$ совершают колебания, которые можно полагать в определенной степени случайными, что будет использовано в дальнейшем. Поведение коэффициента $a_{1,n}$ носит регулярный характер. «Пульсации», заметные на графике для этого коэффициента, уменьшаются с уменьшением шага по времени.

Сопоставим формулы для определения коэффициентов с формулами так называемых генераторов псевдослучайных чисел. Во многих случаях используемые псевдослучайные последовательности получают на основе рекуррентных соотношений следующим путем (конгруэнтный генератор), см. например, [1]:

$$x_m = (bx_{m-1} + c) \bmod P,$$

где b и c — целые числа, т.е. в качестве x_m берется остаток от деления значения целочисленной линейной функции на число *P*. Сравним с этой формулой выражение для $a_{2,n}$:

$$a_{2,n+1} = (a_{2,n} + 2a_{1,n-1}) \bmod (1/\tau).$$

Полагаем, что τ – некоторая отрицательная степень числа 10, видно сходство между конгруэнтным генератором случайных чисел и выражением для коэффициента $a_{2,n}$. Далее, мы воспользуемся «псевдослучайностью» распределения $a_{2,n}$ и $a_{3,n}$.

Вероятностная схема получения решения. Для пояснения подхода запишем вначале (4), оставив три члена:

$$y_{n+1} = (a_{0,n} - \delta_{01,n+1})\tau^0 -$$

$$-(a_{1,n} + 1 - \frac{1}{\tau}\delta_{01,n+1} - \delta_{12,n+1})\tau^1 + (2a_{1,n} + a_{2,n} - \frac{1}{\tau}\delta_{12,n+1})\tau^2$$

$$\delta_{01,n+1} = [(a_{1,n} + 1 - \delta_{12,n+1})\tau]\,, \delta_{12,n+1} = [(2a_{1,n} + a_{2,n})\tau]\,.$$

Положим, что $a_{2,n}$ случайно распределено. Найдём вероятность того, что $\delta_{12,n+1}$ принимает нулевые значения, т.е. произойдёт «нулевой» переброс. Зафиксируем $a_{1,n}$. Для нулевого переброса необходимо выполнение неравенства $2a_{1,n} + a_{2,n} < 1/\tau$.

Видно, что нулевой переброс происходит при таких значениях $a_{2,n}$, что $a_{2,n} < 1/\tau - 2a_{1,n}$. Полагая $a_{2,n}$ случайно распределённой дискретной целочисленной величиной и зная, что она может принимать всего $1/\tau$ различных значений, получим вероятность нулевого переброса в виде:

$$P(a_{1,n}) = (\frac{1}{\tau} - 2a_{1,n})/(\frac{1}{\tau}) = 1 - 2a_{1,n}\tau\,. \tag{8}$$

Полагая $\delta_{01,n+1} = 0$ (это подтверждают расчеты), получим

$$a_{0,n+1} = a_{0,n}\,,\ a_{1,n+1} = a_{1,n} + 1 - \delta_{12,n+1}\,, a_{2,n+1} = 2a_{1,n} + a_{2,n} - \frac{1}{\tau}\delta_{12,n+1}\,.$$

Отсюда находим формулы для коэффициентов. Нас интересует лишь первый коэффициент («линеаризации»): другие члены исчезающе малы при стремлении шага к нулю:

$$a_{1,n} = \sum_{m=1}^{n}(1 - \delta_{12,m}) \equiv \sum_{m=1}^{n}\bar{\delta}_{12,m}\,. \tag{9}$$

Здесь удобнее искать вначале обратную зависимость номера n от этого коэффициента, а затем восстановить прямую зависимость (здесь из вида дифференциальных уравнений видно, что решение строго монотонно, поэтому однозначно находится прямая зависимость). Разобьем область изменения целочисленной переменной $a_{1,n}$ от 0 до $1/\tau-1$ на равные отрезки и будем на каждом фиксированном отрезке искать соответствие приращению $a_{1,n}$, равному 1, приращение переменной n. Будем полагать, что это приращение не обязательно целочисленное (что можно делать, не нарушая точности схемы). Обозначим за n_i значение шага, при котором $a_{1,i}=i$. При этом на i-м отрезке $\sum_{m=n_i}^{n_{i+1}-1}\overline{\delta}_{12,m}=1$. Из (8) следует, что для всего этого отрезка вероятность переброса постоянна и зависит только от $a_{1,n}$. Будем полагать теоретически найденную вероятность (8) равной частоте нулевого переброса на этом отрезке (это важнейшее предположение). Тогда

$$P_i=\frac{1}{n_{i+1}-n_i}\sum_{m=n_i}^{n_{i+1}-1}\overline{\delta}_{12,m}\ ,$$

$$n_{i+1}=n_i+1/P_i \tag{10}$$

после суммирования по i получим

$$n_i=1+\sum_{m=1}^{i-1}\frac{1}{P_m}\ .$$

Здесь n_1=1 (что легко видеть из формулы для вероятности).

Учитывая (8), запишем решение в явном виде

$$n_i=1+\sum_{m=1}^{i-1}\frac{1}{1-2\tau a_{1,m}}\ .$$

Полученная формула дает указанную обратную функцию, что позволяет определить, какому аргументу n соответствует $a_{1,n}$. Построенное «укороченное» решение на рис. 3 описывает выход на постоянное значение («терм»), обозначенное пунктирной линией. То есть удержание трех членов не обеспечивает аппроксимации исходного уравнения, что и демонстрирует данный пример.

Построение полного решения. Будем теперь удерживать слагаемые до τ^3 включительно:

$$y_n = a_{0,n}\tau^0 - a_{1,n}\tau^1 + a_{2,n}\tau^2 - a_{3,n}\tau^3 ,$$

тогда функции переброса примут следующий вид:

$$\delta_{12,n+1} = [(2a_{1,n} + a_{2,n} - \delta_{23,n+1})\tau],\ \delta_{23,n+1} = [(a_{1,n}^2 + 2a_{2,n} + a_{3,n})\tau],$$

причем $a_{2,n}, a_{3,n}$ полагаем случайными. Вероятность $\delta_{12,n+1}$ принимать значение 0 ищется аналогично случаю с тремя слагаемыми. Заметим, что найденная вероятность может содержать ошибку, не превосходящую ошибку рассматриваемой схемы. Из-за недостатка места приводим лишь результат:

$$P(a_{1,n}) = \frac{2(\tau a_{1,n} - 1)^2 - \tau^2 - 3\tau^3}{2(1-2\tau)}.$$

Подставляя это выражение в формулу (10), получим:

$$n_{i+1} = n_i + \frac{2(1-2\tau)}{2(\tau a_{1,i} - 1)^2 - \tau^2 - 3\tau^3}.$$

При использовании этих формул строится решение, которое стремится к аналитическому решению исходной задачи (рис. 3). Здесь с точностью аппроксимации полагается, как и в предыдущем случае, что n_1=1 (это означает, что при $a_{1,n} = 0$ вероятность полагается равной 1).

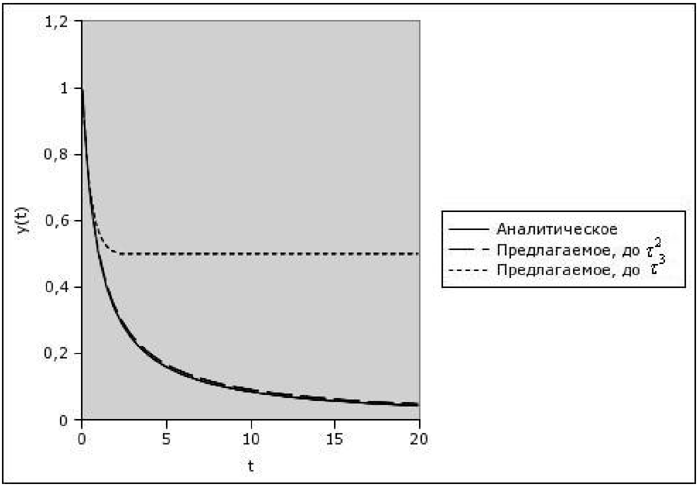

Рис. 3. Сравнение решений с шагом 0.01

Рассмотрим задачу Коши (Задача 3) для уравнения Риккати, не имеющего аналитического решения:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 - t, y(0) = 1 .$$

Удерживаем члены в отрезках ряда до третьей степени включительно. Формулы не сильно отличаются от предыдущих:

$$P(a_{1,n}) = \frac{2(\tau a_{1,n} - 1)^2 - \tau^2 - 3\tau^3 + 2n^2\tau^2}{2(1-2\tau)} ,$$

$$n_{i+1} = n_i + \frac{2(1-2\tau)}{2(\tau a_{1,i} - 1)^2 - \tau^2 - 3\tau^3 + 2n_i^2\tau^2}.$$

На рис. 4 показано сравнение решений по численной схеме Эйлера и по предлагаемому методу. Представлено решение до t=1.2. Видна сходимость в предлагаемом методе по шагу времени. Важно, что решение сходится к решению исходной задачи, это подтверждается совпадением с обычным численным решением.

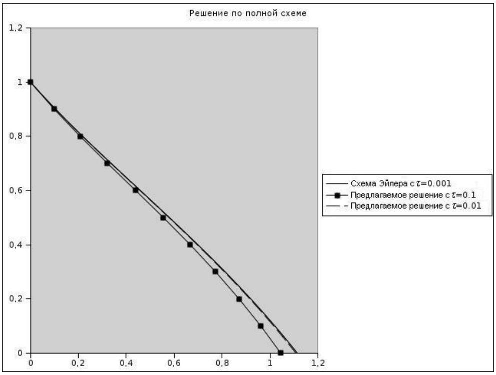

Рис. 4. Решения уравнения Риккати

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1975.

A NEW METHOD OF SOLVING THE DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE FORMALIZATION OF MATHEMATICAL OPERATIONS OF THE COMPUTER

Aristov V. V., Stroganov A. V.

(Russia, Moscow)

In the paper the solution of the differential equation is presented as a part of the series (of the powers of the step of the independent variable). Reducing the intermediate operations in the finite-difference scheme treated as a recurrent formula is used. On the basis of a general analogy with an operation of the computer the explicit form of the solution is constructed by means of the probabilistic methods. The approach is illustrated by solutions of several nonlinear equations.