ЗАМЕТКА О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ЧИСЛА МОД ГАУССОВОЙ СМЕСИ

Апраушева Н. Н., Моллаверди Н.

(Россия, Москва)

Рассматривается сумма k взвешенных нормальных распределений ($2 \le k < \infty$) с равными ковариационными матрицами и с различными векторами средних значений. Для $k \ge 3$ уточнены теоремы о верхних границах числа её мод.

Рассматривается плотность вероятности $f(X)$ суммы взвешенных нормальных распределений с равными ковариационными матрицами $\mathbf{\Sigma}$ и с различными векторами математических ожиданий $\boldsymbol{\mu}_i$,

$f(X) = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\pi}_i f_i\left(X, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma}\right)$, $2 \le k < \infty$, π_i — вес i -й компоненты, $0 < \pi_i < 1$, $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$.

В [1-3] получены следующие результаты.

Теорема 1. При $k = 2$ функция $f(X)$ унимодальна, если расстояния Махаланобиса ρ_{12} не больше двух,

$$\rho_{21} \le 2, \tag{1}$$

$\rho_{21}^2 = (\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)\, \mathbf{\Sigma}^{-1}\, (\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)'$

$(\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)$ — вектор строка, $(\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}_1)'$ — вектор столбец.

Теорема 2. При $k = 2$ и $\rho_{21} > 2$ функция $f(X)$ унимодальна, если

$$\left|\ln\left(\pi_1 \pi_2^{-1}\right)\right| \ge 2^{-1}\rho_{12}^2 + \ln\left[2^{-1}\left(\rho_{21} + \sqrt{\rho_{21}^2 - 4}\right)2^{-1}\right], \pi_1 \ne \pi_2. \tag{2}$$

В [4] неточно сформулирована теорема 3. Правильные утверждения для $k \ge 3$ сформулированы в теоремах 3 и 4, которые являются следствиями из теорем 1 и 2.

Теорема 3. При $k \ge 3$, если среди k компонент смеси существует n_1 пар, удовлетворяющих условиям:

1) $\rho_{si} \le 2, \quad s > i, \quad s \in \{2, 3, ..., k\}, \quad i \in \{1, 2, ..., k–1\},$ (3)

2) $\min\limits_j \rho_{sj} \ge \rho_0, \quad \min\limits_j \rho_{ij} \ge \rho_0, \quad j \in \{1, 2, ..., k\} \setminus s \setminus i,$ (4)

ρ_0 — достаточно большое положительное число ($\rho_0 > 6$), то для мод смеси m имеем $m \le k - n_1$.

Теорема 4. При $k \ge 3$, если среди k компонент смеси имеется n_2 пар, удовлетворяющих условиям:

1) $\rho_{si} > 2, \quad s > i, \quad s \in \{2, 3, ..., k\}, \quad i \in \{1, 2, ..., k–1\},$

и для каждой тройки величины ρ_{si}, π_s, π_i имеют место неравенства (2)

2) выполняются неравенства (4), то для числа мод смеси m имеем $m \le k - n_2$.

Список литературы:

1. Апраушева Н.Н. Об условиях унимодальности и бимодальности смеси двух нормальных классов // Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных явлений. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. С. 31-45.
2. Konstantelos A.C. Unimodality conditions for Gaussian sums // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. AC-25. N.4, p. 438-439.
3. Апраушева Н.Н., Моллаверди Н., и др. //О модах простейшей гауссовой смеси. М.: ВЦ РАН, 2003.
4. Апраушева Н.Н., Моллаверди Н. // О верхней границе числа мод гауссовой смеси. Тр. 11-й конференции Математика, компьютер, образование. М., 2004, с.

THE NOTE ON THE UPPER DOUND OF THE MODE NUMBER OF GAUSSIAN MIXTURE

Aprausheva N. N., Mollaverdi N.

(Russia, Moscow)

The mixture of normal distributions ($2 \leq k < \infty$) with equal covariance matrixes and with various vectors of average values is considered. For $k \geq 3$ it is specified the theorems on the upper bounds of the mode number.