ГОЛОМОРФНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ.

Дондукова Н. Н.

(Россия, Москва)

Вводится понятие голоморфно-геодезических преобразований почти контактных метрических структур. Доказано, что почти контактные метрические многообразия со знакоопределенной метрикой не допускают голоморфно-геодезических преобразований, отличных от аффинных. Также показано, что условие нормальности почти контактного метрического многообразия с индефинитной римановой метрикой сохраняется при голоморфно-геодезических преобразованиях.

Геодезические преобразования псевдоримановых многообразии играют важную роль в изучении их геометрии [1]. Примером геодезических преобразовании являются, например, аффинные преобразования евклидова пространства. Особо популярны геодезические преобразования почти эрмитовых (в частности, келеровых) многообразии, сохраняющие структурный оператор. Еще в 1954 году К.Яно ([2]) было доказано, что келеровы многообразия не допускают нетривиальных геодезических преобразовании. Недавно одним из учеников В.Ф. Кириченко Х. Абоудом [3] были найдены все классы почти эрмитовых структур из классификации Грея-Хервеллы, не допускающие нетривиальные геодезические преобразования.

В этой статье мы начинаем изучение геодезических преобразовании почти контактных метрических многообразии, сохраняющие структурный эндоморфизм. Насколько известно автору, такие преобразования до настоящего времени не были предметом исследования.

Пусть M –гладкое многообразие размерности 2n+1; $X(M)$–модуль гладких векторных полей на многообразии M; $C^{\infty}(M)$ –алгебра гладких функций на многообразии M.

Определение1. *Почти контактной метрической* (короче AC-) структурой на гладком многообразии М называется четверка (η,ξ,Φ,g) тензорных полей на этом многообразии, где η –дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры* , ξ – векторное поле, называемое *характеристическим,* Φ –эндоморфизм модуля $X(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом* , $g=<\ ,\ >$– риманова метрика на M. При этом:

1) $\eta(\xi)=1$;2) $\eta\circ\Phi=0$; 3) $\Phi(\xi)=0$;4) $\Phi^2= -\mathrm{id} +\eta\otimes\xi$;
5) $<\Phi X,\ \Phi Y>=<X,Y>-\eta(X)\eta(Y)$.

Многообразие с фиксированной AC – структурой называется *почти контактным метрическим* (короче AC-)многообразием .

Определение 2. Диффеоморфизм φ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на себя называется *геодезическим преобразованием*, если он любую геодезическую переводит в геодезическую.

Введем в рассмотрение и изучим геодезическое преобразование φ почти контактного метрического многообразия, сохраняющее структурный эндоморфизм Φ. Назовем такое преобразование *голоморфно-геодезическим*.

Пусть $\tilde{g}=\varphi^*(g)$ – новая риманова метрика на М. Тогда с учетом инвариантности Φ имеем

$$\tilde{g}(\Phi X,\Phi Y)=\varphi^*g(\Phi X,\Phi Y)=g(\varphi_*\Phi X,\ \varphi_*\Phi Y)=$$
$$g(\Phi(\varphi_*X),\Phi(\varphi_*Y))=g(\varphi_*X,\varphi_*Y)-\eta(\varphi_*X)\eta(\varphi_*Y)=$$
$$\varphi^*g(X,Y)-\varphi^*\eta(X)\varphi^*\eta(Y)=\tilde{g}(X,Y)-\varphi^*\eta(X)\varphi^*\eta(Y).$$

Кроме того

$$(\varphi^*\eta)(X)=\eta(\varphi_*X)=g(\xi,\ \varphi_*X)=g(\varphi_*\circ\varphi_*^{-1}\xi,\varphi_*X)=\varphi^*g(\varphi_*^{-1}\xi,\ X)=$$
$$=\tilde{g}(\varphi_*^{-1}\xi,\ X)=\tilde{g}(\varphi^*\xi,\ X).$$

Пусть $\tilde{\xi}=\varphi^*\xi,\ \tilde{\eta}=\varphi^*\eta$. Тогда последние соотношения означают, что четверка

$(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \Phi, \tilde{g})$ также является *АС*-структурой на многообразии *М*.

Пусть∇– риманова связность метрики g , $\tilde{\nabla}$– риманова связность метрики $\tilde{g}$.Тогда тензор аффинной деформации $T(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ имеет вид $T(X,Y)=\psi(X)Y+\psi(Y)$, см.[1], где ψ - дифференциальная 1-форма, называемая *формой геодезического искажения* [3]. Если $\psi=0$, то преобразование φ является тривиальным, то есть $\varphi_*\nabla=\nabla$.

Вычислив ковариантную производную структурного эндоморфизма Φ относительно связности $\tilde{\nabla}$, получим

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y=\tilde{\nabla}_X(\Phi Y)-\Phi\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X(\Phi Y)+T(X,\Phi Y)-\Phi(\nabla_X Y+T(X,Y))=$$
$$\nabla_X(\Phi)Y+\Phi\nabla_X Y+T(X,\Phi Y)-\Phi\nabla_X Y-\Phi T(X,Y)=\nabla_X(\Phi)Y+T(X,\Phi Y)-$$
$$\Phi T(X,Y)=\nabla_X(\Phi)Y+\psi(\Phi Y)X+\psi(Y)\Phi X.$$

Итак,

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y=\nabla_X(\Phi)Y+\psi(\Phi Y)X+\psi(Y)\Phi X. \qquad (1)$$

В частности,

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)\xi=\nabla_X(\Phi)\xi+\psi(\xi)\Phi X. \qquad (2)$$

Применив оператор ∇_X к тождеству $g(Z,\Phi Y)=-g(\Phi Z,Y)$, мы получим следующее тождество

$$g(\nabla_X(\Phi)Z,Y)+g(Z,\nabla_X(\Phi)Y)=0. \qquad (3)$$

Теперь введем в рассмотрение эндоморфизм f модуля гладких векторных полей $X(M)$, однозначно определяемый условием $\tilde{g}(X,Y)=g(X,fY)$ $X,Y\in X(M)$. Назовем f *оператором геодезической деформации*. Очевидно, что f-самосопряженный оператор, то есть $g(X,fY)=g(fX,Y)$.

Пусть Y– собственный вектор оператора f, то есть $f(Y)=\lambda Y$ $(\lambda\in R)$. Из (3) получаем

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y,Y)=0;\ g(\nabla_X(\Phi)Y,Y)=0.$$

Тогда с учетом (1)

$$0=\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y,Y)=\tilde{g}(\nabla_X(\Phi)Y,Y)+\psi(\Phi Y)\tilde{g}(X,Y)+\psi(Y)\tilde{g}(\Phi X,Y).$$

Заметим, что

$$\tilde{g}(\nabla_X(\Phi)Y,Y)=g(\nabla_X(\Phi)Y,fY)=g(\nabla_X(\Phi)Y,\lambda Y)=\lambda g(\nabla_X(\Phi)Y,Y)=0.$$

Поэтому предыдущее тождество примет вид:
$\psi(\Phi Y)\ \tilde{g}\ (X,Y)-\psi(Y)\ \tilde{g}\ (\Phi X,Y)=0.$

В силу произвольности вектора X получаем:
$\psi(\Phi Y)Y+\psi(Y)\Phi Y=0.$

Если вектор ξ не входит в число собственных векторов оператора f, то ввиду линейной независимости векторов Y и ΦY, получаем $\psi(Y)=0;\ \psi(\Phi Y)=0$.

Как хорошо известно из курса линейной алгебры, оператор f, будучи самосопряженным, допускает в каждой точке $p\in M$ базис, состоящий из его собственных векторов $\{e_1,\ldots,e_n\}$. В силу доказанного выше Предложения
$\psi(e_i)=0,\ i=1,\ldots,n,$
то есть форма геодезического искажения обращается в нуль в каждой точке многообразия. Отсюда следует
$\psi=0.$

Значит наше преобразование φ тривиально. Тем самым доказана

Теорема 1. *Почти контактное метрическое многообразие (η,ξ,Φ,g) со знакоопределенной римановой метрикой, при условии, что ξ не является собственным вектором оператора f, не допускает нетривиальных голоморфно- геодезических преобразований.*

Замечание. В дальнейшем мы рассматриваем почти контактные метрические многообразия с псевдоримановой метрикой.

Определение 3. *АС* – структура (η,ξ,Φ,g) называется *нормальной*, если $N+2d\eta\otimes\xi=0$, где N–тензор Нейенхейса оператора Φ. Многообразие с фиксированной нормальной *АС* – структурой называется *нормальным* почти контактным метрическим многообразием.

Как известно, условие нормальности [4] структуры (η,ξ,Φ,g) эквивалентно обращению в ноль ее второго, третьего, пятого и шестого структурных тензоров. Можно показать, что эти структурные тензоры в инвариантном виде имеют соответственно следующий вид

$$C(X,Y) = -\frac{1}{8}\{-\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) +$$
$$\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\};$$

$$D(X) = -\frac{1}{2}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi^2 X) + \frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X)\}; \quad (4)$$
$$F(X) = \frac{1}{2}\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\};$$
$$G = \Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\xi.$$

Обозначим через $\tilde{C},\tilde{D},\tilde{F},\tilde{G}$ соответственно, второй, третий , пятый и шестой структурные тензора AC – структуры *(*$\tilde{\eta},\tilde{\xi}$ *, Ф,* $\tilde{g}$ *)*. С учетом формул (4) и (1), имеем

$$\tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{8}\{-\Phi[\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \psi(\Phi X)\Phi^2 Y + \psi(\Phi^2 X)\Phi Y] +$$
$$+\Phi[\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \psi(\Phi^2 X)\Phi Y - \psi(\Phi X)\Phi^2 Y] + \Phi^2[\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) -$$
$$-\psi(\Phi X)\Phi Y - \psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y] + \Phi^2[\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) + \psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y +$$
$$+\psi(\Phi X)\Phi Y]\} = C(X,Y);$$

т.е. $\tilde{C}(X,Y) = C(X,Y)$;

$$\tilde{D}(X) = \frac{1}{2}[\Phi(\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \psi(\tilde{\xi})\Phi X) - \Phi^2(\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \psi(\tilde{\xi})\Phi^2 X) -$$
$$\frac{1}{2}\Phi(\nabla_{\tilde{\xi}}(\Phi)\Phi^2 X - \psi(\Phi X)\tilde{\xi}) + \frac{1}{2}\Phi^2(\nabla_{\tilde{\xi}}(\Phi)\Phi X + \psi(\Phi^2 X)\tilde{\xi})] = D(X);$$

т.е. $\tilde{D}(X) = D(X)$;

$$\tilde{F}(X) = \frac{1}{2}[\Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\tilde{\xi} + \psi(\tilde{\xi})\Phi^2 X - \Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\tilde{\xi} - \psi(\tilde{\xi})\Phi^4 X] = F(X);$$

т.е. $\tilde{F}(X) = F(X)$;

$\tilde{G} = G + \psi(0)\tilde{\xi} = G.$

т.е. $\tilde{G} = G.$

Таким образом, если $C = D = F = G = 0$, то $\tilde{C} = \tilde{D} = \tilde{F} = \tilde{G} = 0$.
Доказана

Теорема2. *Голоморфно-геодезические преобразования сохраняют нормальность почти контактных метрических структур (с псевдоримановой метрикой).*

Список литературы:

1. Синюков Н.С., Геодезические отображения римановых пространств, М., Наука, 1979.
2. Yano K. Sur la correspondense projective entre deux especes pseudo-hermitens, C.R. Acad. Sci. Paris, 1956, V. 239, pp. 1346-1348.
3. Абоуд Х.М., Голоморфно-геодезические преобразования почти эрмитовых многообразий. Дисс.. к.ф.-м.н., М.: МПГУ, 2002.
4. Кириченко В.Ф., Дифференциально - геометрические структуры на многообразиях, М., МПГУ, 2003.

HOLOMORPHILLY-GEODESIC TRANSFORMATIONS OF ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLD.

Dondukova N. N.

(Russia, Moscow)

Holomorphilly-geodesic transformations of arbitrary almost contact metric manifold structures are studied.