УПРАВЛЕНИЕ «ПО РАСХОДУ» В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.
СЛУЧАЙ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Потоцкая И. Ю., Пупышева Ю. Ю.

(Россия, Санкт-Петербург)

Предлагается метод нахождения точек переключения кусочно-постоянного управления в постановке, где требуется погасить одну или несколько компонент решения линейной механической системы с постоянными коэффициентами соответствующих одной частоте. В качестве оптимизируемого функционала рассматривается «расход топлива».

1. Постановка задачи управления по расходу топлива.

Рассмотрим механическую систему, описываемую уравнением

$$d\,x/d\,t = Ax + U(t) \tag{1}$$

относительно вектор-функции $x(t) = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ аргумента t при начальном условии

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x_0 = (x_{10},\dots,x_{n0}) \in R^n$, $U(t) = (u_1,\dots,u_n) \in R^n$, A – постоянная матрица размерности ($n \times n$). Компоненты u_i управления $U(t)$ предполагаются кусочно-постоянными функциями времени с конечным числом точек переключения, последняя из которых обозначается символом T. При таком управлении решение задачи (1) будет суммой нескольких слагаемых, отвечающим тем или иным собственным значениям матрицы A. Слагаемое, отвечающее собственному значению λ, будем называть частотной компонентой решения. В качестве оптимизируемого функционала рассматривается величина:

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{T} \left| u_k(\theta) \right| d\theta , \tag{3}$$

которая в механике пропорциональна расходу топлива. Допустимым считается управление U, которое в момент T обращает в нуль одну или несколько избранных частотных компонент решения. Обозначая сумму избранных компонент символом $\widetilde{x}(t)$, запишем это условие:

$$\widetilde{x}(T) = 0 . \tag{4}$$

Постановка задачи следующая: при заданном числе импульсов допустимого управления найти точки переключения этого управления (включая и точку T), удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (3).

Допустимые управления рассматриваются в следующем представлении:

$$u_k(t) = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) + \widetilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H\left(t - \widetilde{t}_i^{\,k}\right). \tag{5}$$

Управление разбито на положительные и отрицательные ступени (r_k – число положительных, q_k – число отрицательных ступеней компоненты u_k). Величины t_i^k, $\widetilde{t}_i^{\,k} \in [0, T]$ – моменты времени, соответствующие переключениям этих ступеней. Коэффициенты $h_k, \widetilde{h}_k$ постоянны, а $H(t)$ – функция Хевисайда.

2. Гашение колебаний одной частоты.

В задаче (1), (2) предположим, что среди собственных чисел матрицы A есть пара чисто мнимых значений $\kappa = \pm i\mu$ единичной кратности. Этой паре соответствует колебание частоты μ. Для оптимального по "расходу" гашения этой частоты предлагается алгоритм, позволяющий найти точки переключения допустимого управление $U(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода (3), в явном виде. Этот алгоритм состоит из нескольких нижеследующих шагов.

Шаг 1. Разделим задачу (1), (2) на две задачи Коши с тем, чтобы далее ограничиться рассмотрением только одной из них. Для этого в задаче (1), (2) произведем линейную замену:

$$x = B\xi , \tag{6}$$

где B – неособая матрица; $\xi = (y,z) = (y_1, y_2, z_1, ..., z_{n-2}) = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

Постоянную комплексную матрицу B можно подобрать так, чтобы

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \text{ где } Y = \begin{pmatrix} i\mu & 0 \\ 0 & -i\mu \end{pmatrix},$$

а Z – некоторая $(n-2)\times(n-2)$ матрица. Тогда уравнение (1) и условия (2) перейдут в следующие:

$$\dot{y} = Yy + v, \quad y(0) = y_0, \tag{7}$$

$$\dot{z} = Zz + w, \quad z(0) = z_0, \tag{8}$$

в которых

$$y_0 = Dx_0 = (y_{10}, y_{20}), \; z_0 = D_z x_0 = (z_{10}, ..., z_{n-2,0}),$$

$$v = DU = (v_1, v_2), \; w = D_z U = (w_1, ..., w_{n-2}),$$

$$(v, w) = B^{-1}U ,$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{1n} \\ d_{21} \dots d_{2n} \end{pmatrix}, \; D_z = \begin{pmatrix} d_{31} \dots d_{3n} \\ \cdots \\ d_{n1} \dots d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее достаточно ограничиться рассмотрением только задачи (7).

Шаг 2. Выпишем решение задачи (7) с учетом структуры управления (5):

$$y_1 = \cos \mu t \left\{ y_{10} - \frac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{1k} \left(F_C^k - i F_S^k \right) \right\} +$$

$$+ \sin \mu t \left\{ i\, y_{10} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{1k} \left(F_C^k - i F_S^k \right) \right\} + \frac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{1k} u_k ,$$

$$y_2 = \cos \mu t \left\{ y_{20} + \frac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{2k} \left(F_C^k + i F_S^k \right) \right\} + \tag{9}$$
$$+ \sin \mu t \left\{ -i\, y_{20} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{2k} \left(F_C^k + i F_S^k \right) \right\} - \frac{i}{\mu} \sum_{k=1}^{n} d_{2k} u_k$$

,

где

$$F_C^k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) \cos \mu t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H\left(t - \tilde{t}_i^{\,k}\right) \cos \mu \tilde{t}_i^{\,k},$$
$$F_S^k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H\left(t - t_i^k\right) \sin \mu t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H\left(t - \tilde{t}_i^{\,k}\right) \sin \mu \tilde{t}_i^{\,k}. \tag{10}$$

Шаг 3. Для гашения колебания частоты μ (т.е. для выполнения $\tilde{x}(T) = 0$) следует потребовать, чтобы все выражения в фигурных скобках в формулах (9) были равны нулю после того, как отработают все двигатели (для $t > t_{2r_k}^k$, $t > \tilde{t}_{2q_k}^{\,k}$). Разделив начальные данные y_{10}, y_{20} и коэффициенты матрицы D на вещественные (y'_{10}, y'_{20}, D') и мнимые части (y^*_{10}, y^*_{20}, D^*), получим граничные условия в следующем виде

$$K_1 = y'_{10} + \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \left[d^*_{1k} F_C^k - d'_{1k} F_S^k \right] = 0,$$
$$K_2 = y^*_{10} - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \left[d^*_{1k} F_C^k + d'_{1k} F_S^k \right] = 0. \tag{11}$$

Исходя из формул (11), можно заключить, что для дальнейших преобразований достаточно знать первую строку матрицы D.

С учетом структуры управления (5), запишем функционал (3):

$$J = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k \sum_{i=0}^{2r_k} (-1)^i t_i^k + \tilde{h}_k \sum_{i=0}^{2q_k} (-1)^i \tilde{t}_i^{\,k} \right). \tag{12}$$

Далее будем решать задачу минимизации функционала J при выполнении граничных условий (11).

Шаг 4. Вводя множители Лагранжа λ_1, λ_2 перейдем к задаче на безусловный минимум относительно следующего функционала $R = J + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$. Функционал R оказывается функцией числовых параметров λ_1, λ_2 – множителей Лагранжа и t_i^k, $\tilde{t}_i^k$ – точек переключения управления, поэтому можно выписать необходимые условия оптимальности управления

$$\frac{\partial R}{\partial t_i^k} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \tilde{t}_i^k} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda_2} = 0. \qquad (13)$$

Дальнейшее исследование условий (13) приводит к результатам, изложенным в **теореме 1**. Сформулируем некоторые из условий теоремы.

A. Матрица A размерности $(n \times n)$ с вещественными постоянными элементами такова, что среди ее собственных чисел есть хотя бы пара чисто мнимых значений $\pm i\,\mu$, причем соответствующая этой паре подматрица жордановой формы диагональна.

B. Управление $U(t) = (u_1, \dots, u_n)$ в системе (1), удовлетворяющее неравенствам $|u_k| \le \max\limits_k \left(h_k, \tilde{h}_k\right), k = 1, \dots, n$, является релейным вида (5).

C. Выполнены граничные условия (2) и (4), где $T = \max\limits_k \left(t_{2r_k}^k, \tilde{t}_{2q_k}^k\right)$.

Замечание. Условие (4) означает, что в момент T обращается в нуль составляющая $\tilde{x}(t)$ решения $x(t)$, соответствующая упомянутой паре собственных чисел. В случае одновременного гашения $2m$ частот в нуль обращаются все $2m$ составляющих решения $x(t)$, соответствующие собственным числам упомянутым в условии C.

Теорема 1. *Если условия* A, B, C *выполнены*, *то точки переключения* $t_i^k, \tilde{t}_i^k$, *соответствующие необходимым условиям экстремума функционала (5), находятся по следующим формулам* ($l \in Z$):

$$t_i^k = \tilde{t}_i^k \pm \frac{\pi}{\mu} \pm \frac{2\pi l}{\mu}, \quad t_i^k = t_{i+2}^k \pm \frac{2\pi}{\mu} \pm \frac{2\pi l}{\mu}, \tag{14}$$

$$t_1^k = t_k - \Delta_k, \quad t_2^k = t_k + \Delta_k, \tag{15}$$

где t_1^k – момент первого включения компоненты управления для k-й координаты; t_2^k – момент первого выключения, $2\Delta_k$ – ширина ступени управления u_k, t_k – средний момент ступени управления:

$$t_k = (-1)^l \frac{1}{\mu} \arcsin \frac{-y'_{10} d^*_{1k} + y^*_{10} d'_{1k}}{\sqrt{\left(y'^2_{10} + y^{*2}_{10}\right)\left(d'^2_{1k} + d^{*2}_{1k}\right)}} + \pi l, \tag{16}$$

$$\Delta_k = (-1)^l \frac{1}{\mu} \arcsin \frac{\sqrt{\lambda_1^2 \left(y'^2_{10} + y^{*2}_{10}\right)\left(d'^2_{1k} + d^{*2}_{1k}\right) - y'^2_{10}}}{\pm\lambda_1 \sqrt{\left(y'^2_{10} + y^{*2}_{10}\right)\left(d'^2_{1k} + d^{*2}_{1k}\right)}} + \pi l, \tag{17}$$

$$\left(y'^2_{10} + y^{*2}_{10}\right)\lambda_1 = \frac{2}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \pm\left(h_k r_k + \tilde{h}_k q_k\right) \sqrt{\lambda_1^2 \left(y'^2_{10} + y^{*2}_{10}\right)\left(d'^2_{1k} + d^{*2}_{1k}\right) - y'^2_{10}}, \tag{18}$$

$$\lambda_2 = y^*_{10} \left(y'_{10}\right)^{-1} \lambda_1. \tag{19}$$

Согласно теореме 1, управление колебательным движением системы n–го порядка с помощью ступенчатой управляющей функции представляет собой периодический процесс, где для каждой из составляющих управления u_k через половину периода колебаний рассматриваемой частоты чередуются положительные и отрицательные ступени, длительность которых определяется формулой (17), а моменты включений управления – формулами (16), (14) и (15). Количество этих ступеней зависит от времени, отведенного для решения задачи гашения. При увеличении времени гашения возрастает число ступеней управления, уменьшается ширина ступени $(\Delta_k \to 0)$, что влечет за собой уменьшение функционала, т.е. теоретически оптимальным по расходу топлива без ограничения времени оказывается импульсный режим. Реальный режим будет тем ближе к идеальному теоретическому, чем меньше величина ступени управления $2\Delta_k$.

3. Случай кратных чисто мнимых собственных значений.

Предположим, что среди собственных чисел матрицы A в задаче (1), (2) есть пара чисто мнимых значений $\kappa = \pm i\mu$ кратности l. Тогда этой паре соответствуют l колебаний одинаковой частоты μ, однако различных по амплитуде и фазе, в зависимости от начальных условий. Жорданова подматрица, соответствующая этой паре может быть как диагональной, так и квазидиагональной. Полученный результат представим в виде теоремы 2. Для этого сформулируем следующие условия:

D. матрица A системы (1) такова, что среди ее собственных значений существует пара чисто мнимых $\pm i\mu$ кратности $l \geq 2$, причем соответствующая этой паре подматрица жордановой формы квазидиагональна;

E. матрица A системы (1) такова, что среди ее собственных значений существует пара чисто мнимых $\pm i\mu$ кратности $l \geq 2$, причем соответствующая этой паре подматрица жордановой формы диагональна.

Для теоремы будем использовать обозначения

$$a(t) = \sum_{\alpha=0}^{l-1} (-1)^{\alpha} \left(\lambda_1 d'_{\alpha+1,k} + \lambda_2 d^*_{\alpha+1,k}\right) t^{\alpha} (\alpha!)^{-1},$$

$$b(t) = \sum_{\alpha=0}^{l-1} (-1)^{\alpha} \left(\lambda_1 d^*_{\alpha+1,k} - \lambda_2 d'_{\alpha+1,k}\right) t^{\alpha} (\alpha!)^{-1},$$

$$c_1 = \lim_{t\to+\infty} a(t), \quad c_2 = \lim_{t\to+\infty} b(t).$$

Теорема 2. *Если условия B, C, D выполнены, то для точек переключения* $t_i^k, \tilde{t}_i^k$, *соответствующих необходимым условиям экстремума функционала (3), возможны только следующие четыре случая (* $m \in Z$ *):*

1. Если $c_1 = \pm\infty, c_2 = \pm\infty$ *, то количество точек переключения не может быть бесконечным;*

2. Если $c_1 = \pm\infty, c_2 = \pm 1$, *то* $t_i^k = \mp\dfrac{\pi}{2\mu} + \dfrac{2\pi m}{\mu}, \quad \tilde{t}_i^k = \pm\dfrac{\pi}{2\mu} + \dfrac{2\pi m}{\mu}$;

3. *Если* $c_1 = 1, c_2 = \pm\infty$

то $t_i^k = \pm\dfrac{\pi}{\mu} + \dfrac{2\pi m}{\mu}, \quad \tilde{t}_i^k = \pm\dfrac{2\pi m}{\mu}$;

4. *Если* $c_1 = -1, c_2 = \pm\infty$, *то* $t_i^k = \pm\dfrac{2\pi m}{\mu}, \quad \tilde{t}_i^k = \pm\dfrac{\pi}{\mu} + \dfrac{2\pi m}{\mu}$.

Замечание: Если условия B, C, E выполнены, то точки переключения $t_i^k, \tilde{t}_i^k$, соответствующие необходимым условиям экстремума функционала (3), находятся по формулам **теоремы 1**.

4. Задача "спящего волчка". Задача вращательного движения тела в однородном поле тяжести.

Пусть твердое тело совершает движение вокруг неподвижной точки O под действием силы тяжести [3]. Введем в рассмотрение две системы координат с началом в точке O: неподвижную (ξ,η,ζ) и подвижную (x,y,z), которая совпадает с главными осями инерции тела. Ось $O\zeta$ пусть направлена вертикально вверх. Орт этой оси обозначим через e_ζ, его направляющие косинусы в системе (x,y,z) пусть будут (α,β,γ). Угловую скорость вращения тела в системе (ξ,η,ζ) обозначим ω.

Движение тела в этом случае определяется уравнениями Эйлера-Пуассона [3]:

$$\begin{aligned}
&I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\,\omega_z = mg(\beta\,z_c - \gamma\,y_c), \quad \dot{\alpha} = \beta\,\omega_z - \gamma\,\omega_y\,,\\
&I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\,\omega_z = mg(\gamma\,x_c - \alpha\,z_c), \quad \dot{\beta} = \gamma\,\omega_x - \alpha\,\omega_z\,,\\
&I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\,\omega_y = mg(\alpha\,y_c - \beta\,x_c), \quad \dot{\gamma} = \alpha\,\omega_y - \beta\,\omega_x\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Постоянными параметрами уравнений (20) являются моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно осей системы (x, y, z) и координаты центра масс x_c, y_c, z_c.

<u>Движение в случае "спящего волчка".</u>

В случае Лагранжа принимаем $I_x = I_y = I$, $x_c = y_c = 0$. Тело, удовлетворяющее этим условиям, называют "волчком". Примером "волчка" может служить однородное тело, полученное в результате вращения плоской фигуры относительно оси ее симметрии. В случае стационарного вращения тела вокруг оси Oz, совпадающей при $\theta = 0$ с вертикальной осью $O\zeta$ и при $\theta = \pi$ с обратным направлением оси $O\zeta$, его называют "спящим волчком". Здесь θ – угол нутации.

Для решения задачи об устойчивости вертикального положения оси Oz "спящего волчка" описание движения в углах Эйлера является неподходящим, поскольку при $\sin\theta = 0$ углы ψ и φ становятся неразличимыми. Можно говорить о сумме этих углов, но нельзя о каждом из них в отдельности. Поэтому введем в рассмотрение декартовы координаты ξ, η, ζ "вершины волчка", т.е. координаты конца орта k оси Oz в неподвижной системе (ξ, η, ζ). Вертикальное положение оси Oz отвечает решению $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 1$.

Чтобы судить о необходимых условиях устойчивости полезно исследовать уравнения первого приближения для отклонения оси волчка от вертикального положения [3]. Тело с неподвижной точкой имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат возьмем $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$, $q_3 = \varphi + \psi$ и применим уравнение Лагранжа II рода для составления уравнений малых колебаний по координатам ξ и η.

Составим уравнения Лагранжа II рода для координат ξ и η (уравнения Круткова) и введем вектор управления $U(t)=(u_1,u_2)$ [1].

В итоге получим управляемую систему с двумя степенями свободы:

$$\ddot{\xi}+B\dot{\eta}-A\xi=u_1,\quad \ddot{\eta}-B\dot{\xi}-A\eta=u_2, \tag{21}$$

где $B=G_zI^{-1}$, $A=mg\,z_cI^{-1}$, $G_z=const$ – момент количества движения относительно оси Oz. Заметим, что уравнение Лагранжа для q_3 дает интеграл $I_z\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)=G_z=const$. Роль управления в системе (21) могут играть обобщенные силы.

Введем замену:

$$x_1=\xi,\quad x_2=\dot{\xi},\quad x_3=\eta,\quad x_4=\dot{\eta} \tag{22}$$

и перепишем систему (21) в следующем виде:

$$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=Ax_1-Bx_4+v_2,\dot{x}_3=x_4,\dot{x}_4=Bx_2+Ax_3+v_4. \tag{23}$$

Характеристическое уравнение системы (23) имеет корни

$$k=\pm\tfrac{1}{2}iB\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4A-B^2} \tag{24}$$

Если вертикальное положение оси "волчка" устойчиво, то оно необходимо будет устойчивым при решении задачи в линейном приближении и, следовательно, необходимое условие устойчивости оси "волчка" совпадает с достаточным условием: $4A<B^2$. В этом случае собственные значения матрицы системы (23) – четыре различных чисто мнимых числа:

$$k=i\left(\pm\tfrac{1}{2}B\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{B^2-4A}B\right). \tag{25}$$

Поставим задачу гашения колебания частоты $\mu=\pm\frac{1}{2}B\pm\frac{1}{2}\sqrt{B^2-4A}$. Для этого воспользуемся теоремой 1. Следуя алгоритму, построим нужную нам строку матрицы D, разделяя которую на вещественную и мнимую части, получим:

$$D'=\left(1,\quad 0,\quad 0,\quad -B\mu^2A^{-1}\left(\mu^2+A\right)^{-1}\right),D^*=\left(0,\quad \mu A^{-1},\quad B\mu\left(\mu^2+A\right)^{-1},\quad 0\right).$$

Для системы (23) начальные условия $x^0=\left(\xi^0,\dot{\xi}^0,\eta^0,\dot{\eta}^0\right)$, следовательно, первый элемент новых начальных данных будет таким:

$$y' = \xi^0 - B\mu^2\dot{\eta}^0 A^{-1}\left(\mu^2 + A\right)^{-1}, y^* = \mu\dot{\xi}^0 A^{-1} + B\mu\eta^0\left(\mu^2 + A\right)^{-1}$$

С помощью этих значений выпишем уравнение для множителя Лагранжа λ:

$$a\lambda = \pm\frac{2}{\mu}\left(H_1\sqrt{a\mu^2 A^{-2}\lambda^2 - y'^2} + H_2\sqrt{aB^2\mu^4\left(A\left(\mu^2 + A^2\right)\right)^{-2}\lambda^2 - y'^2}\right). \qquad (26)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a = \left\{\xi^0 - B\mu^2 A^{-1}\left(\mu^2 + A\right)^{-1}\dot{\eta}^0\right\}^2 + \left\{\mu A^{-1}\dot{\xi}^0 + B\mu\left(\mu^2 + A\right)^{-1}\eta^0\right\}^2,$$

$$H_1 = \left(h_1 r_1 + \tilde{h}_1 q_1\right), H_2 = \left(h_2 r_2 + \tilde{h}_2 q_2\right).$$

Из уравнения (26) находим:

$$\lambda = \pm 2y'\left(\mu\sqrt{aM}\right)^{-1}\sqrt{-N \pm \sqrt{D}}, \qquad (27)$$

где

$$N = a\left(H_1^2 + H_2^2\right) - 4A^{-2}\left(H_1^2 - H_2^2\right)\left(H_1^2 - H_2^2 B^2\mu^2\left(\mu^2 + A\right)^{-2}\right),$$

$$D = 4a^2 H_1^2 H_2^2 - 16aA^{-2}H_1^2 H_2^2\left(H_1^2 - H_2^2\right)\left(1 - B^2\mu^2\left(\mu^2 + A\right)^{-2}\right),$$

$$M = a^2 + 16A^{-4}\left(H_1^2 - H_2^2 B^2\mu^2\left(\mu^2 + A\right)^{-2}\right)^2 - 8aA^{-2}\left(H_1^2 + H_2^2 B^2\mu^2\left(\mu^2 + A\right)^{-2}\right).$$

Используя выражение (27), мы можем получить формулы для вычисления продолжительности управляющего воздействия:

$$\cos\mu\Delta_1 = \pm\frac{AM}{2\sqrt{-N \pm \sqrt{D}}}, \cos\mu\Delta_2 = \pm\frac{A\left(\mu^2 + A\right)\sqrt{M}}{2B\mu\sqrt{-N \pm \sqrt{D}}}. \qquad (28)$$

Формулы для вычисления моментов включения управления не зависят от множителя Лагранжа:

$$\cos\mu t_1 = \mp\frac{\mu\left(\mu^2 + A\right)\dot{\xi}^0 + BA\mu\eta^0}{\sqrt{\left(A\left(\mu^2 + A\right)\xi^0 - B\mu^2\dot{\eta}^0\right)^2 + \left(\mu\left(\mu^2 + A\right)\dot{\xi}^0 + BA\mu\eta^0\right)^2}},$$

$$\cos\mu t_2 = \pm\frac{A\left(\mu^2 + A\right)\xi^0 - B\mu^2\dot{\eta}^0}{\sqrt{\left(A\left(\mu^2 + A\right)\xi^0 - B\mu^2\dot{\eta}^0\right)^2 + \left(\mu\left(\mu^2 + A\right)\dot{\xi}^0 + BA\mu\eta^0\right)^2}}. \qquad (29)$$

Если $H_1 = H_2$, то $\sqrt{D} = N, \quad N > 0$, то множитель Лагранжа равен

$$\lambda = \pm 2y'\left(\mu\sqrt{aM}\right)^{-1}\sqrt{-2N}$$

и является действительным числом только в случае $M < 0$. Формулы (28) и (29) в этом случае изменятся следующим образом:

$$\cos\mu\Delta_1 = \pm\frac{A\sqrt{|M|}}{2\sqrt{2N}}, \cos\mu\Delta_2 = \pm\frac{A\left(\mu^2 + A\right)\sqrt{|M|}}{2B\mu\sqrt{N}}.$$

Теперь предположим, что по одной из компонент управления переключения отсутствуют, т.е. один из $\sin\mu\Delta_k$ (k – номер компоненты управления) равен нулю. Тогда существуют два набора формул для определения множителя Лагранжа и ширины ступени управления. В зависимости от значения k, λ и Δ_k находятся из следующих выражений:

I. при $\sin\mu\Delta_2 = 0$

$$\lambda = \pm\frac{2H_1 A y'}{\mu\sqrt{a\left(4H_1^2 - aA^2\right)}}, \cos\mu\Delta_1 = \pm\frac{\sqrt{4H_1^2 - aA^2}}{2H_1};$$

II. при $\sin\mu\Delta_1 = 0$

$$\lambda = \pm\frac{2H_2 A y'\left(\mu^2 + A\right)}{\mu\sqrt{a\left(4H_2^2B^2 - aA^2\left(\mu^2 + A\right)^2\right)}}, \cos\mu\Delta_2 = \pm\frac{\sqrt{4H_2^2B^2 - aA^2\left(\mu^2 + A\right)^2}}{2H_2B\mu}.$$

С течением времени в результате диссипации энергии волчка из-за трения и сопротивления атмосферы кинетический момент уменьшается и наступает момент, для которого условие перестает выполняться. Тогда волчок “просыпается”.

При выполнении равенства $4A = B^2$ характеристическое уравнение системы уравнение (23) будет иметь два чисто мнимых корня $k = \pm\frac{1}{2}iB$, каждый из которых второй кратности. Найдем в этом случае матрицу преобразования D, разделенную на вещественную и мнимую части:

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & B/4 & B^2/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & B/4 & B^2/8 & 0 \end{pmatrix}, D^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ B^2/8 & 0 & 0 & -B/4 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -B^2/8 & 0 & 0 & B/4 \end{pmatrix}.$$

Если $4A > B^2$, то характеристическое уравнение системы (23) будет иметь четыре комплексных собственных значения, два из которых имеют положительную вещественную часть, два – отрицательную, и положение равновесия оси в линейном приближении неустойчиво.

Список литературы:

1. Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И.Ю. Управление по критерию расхода в механических системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.
2. Пупышева Ю.Ю. Алгоритмы нахождения точек переключения кусочно-полиномиального управления в линейных механических системах. Диссертация на соискание уч. степени канд. ф.-м. наук, СПбГУ, 2003.
3. Новоселов В.С. Аналитическая динамика управляемого движения. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998.

Потоцкая И. Ю., Пупышева Ю. Ю. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 554 – 567
Pototskaya I. Yu., Poupysheva J. Yu. — MCE — 2005, vol. 2, p. 554 – 567

CONTROL IN LINEAR SYSTEMS WITH "EXPENDITURE" CRITERIA. ON THE EIGENVALUE MULTIPLICITY CASE.

Pototskaya I. Yu., Poupysheva J. Yu.

(Russia, Saint-Petersburg)

The controlled motion which is represented by the linear ODE system is considered. Here matrix of the system is a constant with real valued coefficients. The initial value is given. The control is supposed to belong to the class of piecewise constant functions of t along the interval [0, T]. The admissible controls satisfy the condition that all the terms of solution corresponding to some selected eigenvalues of the matrix of the system should be equal to zero at the moment $t = T$ *. The problem under consideration is to construct an admissible control which minimizes "The Expenditure".*