КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Борисов А. В., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В.

(Россия, Томск)

В работе идеология теории комплексного ростка применяется для построения аналитических решений, асимптотических по малому параметру $\hbar$, $\hbar\to 0$, многомерного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с внешним полем (переменными коэффициентами) и локальной кубичной нелинейностью. Асимптотики ищутся в классе функций, локализованных в окрестности незамкнутой поверхности, ассоциированной с фазовой кривой, описывающей эволюцию вершины поверхности. В направлении нормали к поверхности функции класса имеют вид односолитонных функций одномерного НУШ. Проведена квазиклассическая линеаризация НУШ с точностью до $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar\to 0$ и получено ассоциированное линейное уравнение Шредингера. Изложена схема построения главного члена асимптотики.

Нелинейное $(1+n)$ -мерное уравнение Шредингера с внешним полем и фокусирующей нелинейностью запишем в виде

$$L(\Psi)(\vec{x}) = \left[-i\hbar\partial_t + H(\vec{p},\vec{x},t) - g^2\,|\,\Psi(\vec{x},t,\hbar)\,|^2\right]\Psi(\vec{x},t,\hbar) = 0, \qquad (1)$$

где

$\vec{x} = (x_j) \in \Re^n$; $i, j, k, l = 1,\ldots, n$; $t \in \Re^1$, $\partial_t = \partial/\partial t$; $\vec{p} = -i\hbar\nabla$; ∇ – оператор градиента по $\vec{x}$; g — вещественный параметр нелинейности; $\hbar$ — асимптотический параметр, $\hbar\to 0$.

Псевдодифференциальный оператор $H(\vec{p},\vec{x},t)$ упорядочен по Вейлю и имеет символ $H(\vec{p},\vec{x},t)$ квадратичный по импульсам $\vec{p}$:

$$H(\hat{\vec{p}},\vec{x},t)=\tfrac{1}{2}<\hat{\vec{p}},H_{pp}(t)\hat{\vec{p}}>+ \\ +\tfrac{1}{2}\left(<\hat{\vec{p}},\vec{H}(\vec{x},t)>+<\vec{H}(\vec{x},t),\hat{\vec{p}}>\right)+H_0(\vec{x},t) \tag{2}$$

Здесь $<\vec{a},\vec{b}>=\sum\limits_{l=1}^{n}a_l b_l$; вещественные функции: ($n\times n$) - матрица $H_{pp}(t)$, вектор $\vec{H}(\vec{x},t)$ и скаляр $H_0(\vec{x},t)$ гладко зависят от указанных аргументов. Эти функции моделируют внешние поля, действующие на систему. Состояние системы описывается комплексной функцией $\Psi(\vec{x},t,\hbar)$,
$|\Psi|^2=|\Psi(\vec{x},t,\hbar)|^2=\Psi(\vec{x},t,\hbar)\Psi^*(\vec{x},t,\hbar)$, функция $\Psi^*(\vec{x},t,\hbar)$ комплексно сопряжена к $\Psi(\vec{x},t,\hbar)$.

В (1+1) - мерном случае в отсутствии внешних полей уравнение (1) принимает вид

$$\left(i\hbar\partial_t+\frac{1}{2}\hbar^2\partial_x^2+g^2\,|\Psi(\vec{x},t,\hbar)|^2\right)\Psi(\vec{x},t,\hbar)=0, \tag{3}$$

где $x\in\Re^1,\partial_x=\partial/\partial x$. Уравнение (3) имеет односолитонное решение [1,2]

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar)=-\frac{2\eta}{g}\frac{1}{\mathrm{ch}\big(2\eta(x-x_0+2\xi t)/\hbar\big)}\exp\left[\frac{1}{\hbar}(2\xi x-2(\xi^2-\eta^2)t+\varphi_0)\right] \tag{4}$$

Здесь вещественные постоянные ξ, η, x_0, φ_0 являются параметрами решения.
В работе [3], следуя теории комплексного ростка (см., например, [4,5]), получено квазиклассическое решение уравнения (1), главный член которого найден в виде

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar)=\frac{\exp\left[\dfrac{1}{\hbar}S(\vec{x},t,\hbar)\right]}{g\cdot\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\hbar}\sigma(\vec{x},t,\hbar)\right)}\sqrt{<\nabla\sigma,H_{pp}(t)\nabla\sigma>} \tag{5}$$

Пусть функция $\Omega(\vec{x},t,\hbar)=S(\vec{x},t,\hbar)+i\sigma(\vec{x},t,\hbar)$ регулярно зависит от параметра $\hbar$, а ее старшая часть — функция

$\Omega(\vec{x},t,0)=\Omega^{(0)}(\vec{x},t)=S^{(0)}(\vec{x},t)+i\sigma^{(0)}(\vec{x},t)$, — является комплексным решением уравнения Гамильтона-Якоби

$$\partial_t\Omega^{(0)}+H(\nabla\Omega^{(0)},\vec{x},t)=0\cdot \qquad (6)$$

Функции вида (5) локализованы в окрестности t - параметрического семейства поверхностей

$$\Gamma^t=\left\{\vec{x}:\sigma(\vec{x},t,0)=\sigma^{(0)}(\vec{x},t)=0\right\}. \qquad (7)$$

Будем предполагать, что ранг матрицы Гессе функции $\sigma^{(0)}(\vec{x},t)$ равен n в любой точке поверхности Γ^t. Построение глобальных решений уравнения (6) представляет собой отдельную проблему, которую мы не рассматриваем в данной работе. Здесь мы рассмотрим задачу об эволюции функций, локализованных в начальный момент времени $t=0$ в некоторой малой окрестности $U_{\vec{x}_0}$ точки $\vec{x}_0$ на поверхности (7). Обозначим через $\gamma=\{\vec{x}:\vec{x}\in\Re^n,\ \ \vec{x}=\vec{X}(t),t\in\Re^1\}$ гладкую кривую в пространстве координат $\vec{x}\in\Re^n$, проходящую через точку $\vec{x}_0=\vec{X}(0)$, такую, что $\vec{X}(t)\in\Gamma^t$. Данная кривая играет роль «классической траектории», соответствующей решению квантового уравнения (1). В окрестности $U_{\vec{X}(t)}\subset\Gamma^t$ точки $\vec{X}(t)\in\gamma$ гиперповерхность Γ^t можно аппроксимировать более простой поверхностью, например, касательной плоскостью. Последняя однозначно определяется нормалью и точкой касания. Обозначим через $\vec{\pi}(t)$ нормаль к поверхности Γ^t в точке $\vec{x}=\vec{X}(t)$. Начальное значение вектора $\vec{\pi}(0)$ определяется конфигурацией поверхности Γ^0. Для построения асимптотического решения уравнения (1) мы будем использовать комплексный росток n-мерное комплексное линейное пространство, ассоциированное с уравнением [4], и функции, определенные в окрестности гиперповерхности (7). При построении квазиклассических асимптотик росткового типа, вместо касательной плоскости удобно использовать поверхности второго порядка

$$<\vec{\pi}(t),\Delta\vec{x}>+\tfrac{1}{2}<\Delta\vec{x},Q_2(t)\Delta\vec{x}>=0\,, \qquad (8)$$

которые, при соответствующем выборе матрицы $Q_2(t)$, являются квадратичной аппроксимацией поверхности (7). Будем рассматривать функции, локализованные на поверхности (8) в окрестности точки $\vec{x}=\vec{X}(t)$ «вершины» поверхности. Такие функции можно выделить, если на комплексном ростке выбрать специальный базис в определенном смысле «ортогональный» вектору $\vec{\pi}(t)$.[1] В результате классическая траектория γ оказывается зависящей так же и от комплексного ростка.
Введем класс комплексных функций с общим элементом вида

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar)=\sqrt{<\vec{\pi}(t),H_{pp}(t)\vec{\pi}(t)>g^{-2}}\exp\left[\frac{1}{\hbar}S(\vec{x},t,\hbar)\right]\mathrm{ch}^{-1}(\theta)(1+ \qquad (9)$$
$$+\hbar\,\mathrm{ch}(\theta)\mathrm{u}(\theta,\vec{x},t,\hbar)+i\hbar\,\mathrm{ch}(\theta)\mathrm{v}(\theta,\vec{x},t,\hbar)),$$

где $\theta=\sigma(\vec{x},t,\hbar)/\hbar$, является «быстрой» переменной, вещественные функции $u(\theta,\vec{x},t,\hbar)$, $\mathrm{v}(\theta,\vec{x},t,\hbar)$ регулярно зависят от своих аргументов и ограничены по θ,

$$\sigma(\vec{x},t,\hbar)=<\vec{\pi}(t),\Delta\vec{x}>+\frac{1}{2}<\Delta\vec{x},Q_2(t)\Delta\vec{x}>+\hbar\sigma^1(\vec{x},t,\hbar)\,,\quad \Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{X}(t)\,, \qquad (10)$$

$$S(\vec{x},t,\hbar)=S^{(0)}(t)+<\vec{P}(t),\Delta\vec{x}>+\frac{1}{2}<\Delta\vec{x},Q_1(t)\Delta\vec{x}>+\hbar S^1(\vec{x},t,\hbar)\,\cdot \qquad (11)$$

Здесь вещественная функция $S^{(0)}(t)$, вещественные n-мерные векторные функции $\vec{\pi}(t)$, $\vec{P}(t)$, $\vec{X}(t)$; вещественные ($n\times n$) - матричные функции $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$, являются функциональными параметрами класса. Функции $\sigma^1(\vec{x},t,\hbar)=\sigma^1(\vec{\xi},t,\hbar)$, $S^1(\vec{x},t,\hbar)=S^1(\vec{\xi},t,\hbar)$, $\vec{\xi}=\Delta\vec{x}/\sqrt{\hbar}$ вещественные функции. Квазиклассические асимптотики уравнения (1) в многомерном случае с внешним полем будем искать в этом классе функций. Функции вида (9) не нормированы по норме пространства $L_2(\Re^n,d\vec{x})$, по-

[1] Заметим, что такая ситуация является типичной для метода комплексного ростка [4,5], где для построения решений спектральной задачи, локализованных на неполномерных лагранжевых многообразиях, необходимо выбирать базис на ростке «касательный» к многообразию.

скольку локализованы на неограниченной гиперповерхности (8). Это является следствием замены поверхности $\sigma^{(0)}(\vec{x},t)$ (в интересующих нас физических приложения компактной) на ее квадратичную аппроксимацию (8) в точке $\vec{x}=\vec{X}(t)$. Поскольку нас интересуют функции, локализованные в окрестности точки $\vec{x}=\vec{X}(t)$, то приходим к задаче об определении малых возмущений на «фоне» гиперповерхности (8). Для исключения «фона» рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}(\vec{x},t,\hbar)=\Psi(\theta,\vec{x},t,\hbar)-\Psi(\theta_0,\vec{x},t,\hbar)=\\
&\qquad \frac{d}{d\theta}\sqrt{<\vec{\pi}(t),H_{pp}(t)\vec{\pi}(t)>g^{-2}}\,\mathrm{ch}^{-1}(\theta)\times\\
&\qquad \times\exp\left[\frac{1}{\hbar}S(\vec{x},t,\hbar)\right](1+\hbar\,\mathrm{ch}(\theta)\,\mathrm{u}(\theta,\vec{x},t,\hbar)+\\
&\qquad +i\hbar\,\mathrm{ch}(\theta)\,\mathrm{v}(\theta,\vec{x},t,\hbar))\Big|_{\theta=\theta_0}\theta_1\\
&\quad \theta_0=\tfrac{1}{\hbar}\Big[<\vec{\pi}(t),\Delta\vec{x}>+\tfrac{1}{2}<\vec{\xi},Q_2(t)\vec{\xi}>\Big],\\
&\quad \theta_1=\sigma^1(\vec{\xi},t,\hbar).
\end{aligned} \qquad (12)$$

Функции $\tilde{\Psi}(\vec{x},t,\hbar)$ вида (12), нормированы в $L_2(\Re^n,d\vec{x})$. В дальнейшем под малостью решений уравнения (1) будем понимать малость относительно нормы в $L_2(\Re^n,d\vec{x})$ функций $\tilde{\Psi}(\vec{x},t,\hbar)$ вида (12). Функцию $\Psi(\theta_0,\vec{x},t,\hbar)$ будем называть фоновой функцией. Для выполнения условия малости потребуем, чтобы функции $\sigma^1(\vec{\xi},t,\hbar)$, $S^1(\vec{\xi},t,\hbar)$ принадлежали пространству Шварца $\mathrm{S}(\Re_{\xi}^{n-1},d\mu)$, где $d\mu$ — мера на гиперповерхности (8). В классе функций (9) в случае n=1 содержится точное односолитонное решение (4) одномерного свободного (без внешних полей) нелинейного уравнения Шредингера (3) при специальном выборе функциональных параметров класса. Если rang[Q_2(t)]=n, то при переходе к одномерному случаю функции (9) не переходят в (4), поскольку аргумент θ гиперболического косинуса будет содержать квадратичные по x слагаемые. Достаточными условиями такого перехода являются соотношения

$$\operatorname{Rang} Q_2(\mathrm{t}) = n\text{-}1,\ \operatorname{rang}\left\| Q_2(\mathrm{t}), \vec{\pi}(t) \right\| = n\,, \tag{13}$$

где $\left\| Q_2(\mathrm{t}), \vec{\pi}(t) \right\|$ — расширенная матрица размерности $n\times(n+1)$. На классе функций (9) в предположении (13) справедливы следующие асимптотические оценки.[2]

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{x}_k = \hat{O}(\hbar^{1/2}),\\ &\Delta\vec{p}_k\big|_{\theta=\mathrm{const}} = \hat{O}(\hbar^{1/2}),\\ &<\vec{\pi}(t), \Delta\vec{x}> = \hat{O}(\hbar) \end{aligned} \tag{15}$$

Под главным членом квазиклассической асимптотики будем понимать решения уравнения (1), которые с точностью до $O(\hbar)$, $\hbar\to 0$ в смысле (14), определяют матричные элементы и средние значения произвольных операторов с бесконечно гладким вейлевским символом, регулярно зависящим от $\hbar$. На классе (9) в смысле оценок (15) главный член асимптотики имеет вид

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar) = \sqrt{<\vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} > g^{-2}}\,\exp\left[\frac{1}{\hbar}S(\vec{x},t,\hbar)\right]\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{1}{\hbar}\sigma(\vec{x},t,\hbar)\right) \tag{16}$$

и определяется фазовой кривой $Z(t,\hbar) = (\vec{P}(t,\hbar), \vec{X}(t,\hbar))$, вектором $\vec{\pi} = \vec{\pi}(t)$, функциями $\sigma(\vec{x},t,\hbar)$ и $S(\vec{x},t,\hbar)$ вида (10) и (11), соответственно.

Для построения главного члена асимптотики достаточно построить асимптотическое решения уравнения с точностью до $O(\hbar^2)$ (см. [4]). Подставим выражение (9) в (1), ограничимся членами порядка до $O(\hbar^2)$, выделим уравнения относительно «быстрой» переменной θ и построим решения этих уравнений, при которых функция (16) убывает при $\theta\to\infty$. Тогда для функций S и σ, входящих в (16), получим следующие условия, записанные для комплексной функции $\Omega = S + i\sigma$:

---

[2] Под $\hat{O}(\hbar^{\alpha})$ понимается оператор F такой, что для функций $\widetilde{\Psi}$ вида (11) справедливо

$$\frac{\|F\widetilde{\Psi}\|}{\|\widetilde{\Psi}\|} = O(\hbar^{\alpha}),\quad \hbar\to 0 \tag{14},$$

$$\Omega_t + H(\nabla\Omega, \vec{x}, t) - \frac{i\hbar}{2}\Big[\mathrm{Sp}(H_{pp}(t)\Omega_{xx} + H_{px}(\nabla\Omega, \vec{x}, t)) + \tag{17}$$

$$+ < \vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} >^{-1} \frac{d}{dt} < \vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} > \Big] = 0.$$

Подстановка $\Omega = -i\hbar \ln[\psi(\vec{x}, t, \hbar) < \vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} >^{-1/2}]$ приводит уравнение (17) к виду

$$\left[-i\hbar\partial_t + H(\vec{p}, \vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t, \hbar) = O(\hbar^{3/2}), \tag{18}$$

где оператор $H(\vec{p}, \vec{x}, t)$ имеет вид (2),

$$\begin{gathered} \psi(\vec{x}, t, \hbar) = \sqrt{< \vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} >} \exp(\tfrac{i}{\hbar}\Omega) = \exp(\tfrac{i}{\hbar}S)\varphi(\vec{x}, t, \hbar) \\ \varphi(\vec{x}, t, \hbar) = \sqrt{< \vec{\pi}, H_{pp}(t)\vec{\pi} >} \exp(-\frac{1}{\hbar}\sigma) \end{gathered}, \tag{19}$$

Уравнение

$$\left[-i\hbar\partial_t + H(\hat{\vec{p}}, \vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t, \hbar) = 0 \tag{20}$$

назовем *линейным ассоциированным уравнением Шредингера*, отвечающим уравнению (1). Таким образом, главный член асимптотики нелинейного уравнения (1) может быть построен с помощью решения линейного ассоциированного уравнения (20) в соответствии с (16), (19). Подчеркнем, что решение (19) должно быть таким, чтобы соответствующая ему функция (16) удовлетворяла условиям (13). Класс таких решений нелинейного уравнения (1) обозначим $\mathrm{S}_{\hbar}^{t}$.

Решения уравнения (20) с таким свойством будем искать в классе функций

$$\psi(\vec{x}, t, \hbar) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} < \vec{\pi}, \Delta\vec{x} >\right)\varphi(\vec{x}, t, \hbar)\cdot \tag{21}$$

Подстановка (21) в (20) приводит к следующему уравнению для функции $\varphi(\vec{x}, t, \hbar)$:

$$\begin{bmatrix} -i\hbar\partial_t + i < \dot{\vec{\pi}}, \Delta\vec{x} > -i < \vec{\pi}, \dot{\vec{X}}(t) > + \\ + H(\vec{P}(t) + i\vec{\pi} + \Delta\hat{\vec{p}}, \vec{x}, t) \end{bmatrix} \phi(\vec{x}, t, \hbar) = O(\hbar^{3/2})\cdot \tag{22}$$

Разложим оператор уравнения (22) в ряд по $\Delta\vec{x}$ и $\Delta\vec{p}$ с точностью до $O(\hbar^{3/2})$. В смысле оценок $O(\hbar^{3/2})$ получим

$$\begin{aligned}
&\{-i\hbar\partial_t - i[<\vec{\pi},(\dot{\vec{X}}(t) - H_{\vec{p}}(t))> - <(\dot{\vec{\pi}} + H_{xp}(t)\vec{\pi}),\Delta\vec{x}> - \\
&- <\vec{\pi},H_{pp}(t)\Delta\vec{p}>] + H(t) - \frac{1}{2}<\vec{\pi},H_{pp}(t)\vec{\pi}> + \\
&+ <H_{\vec{x}}(t),\Delta\vec{x}> + <H_{\vec{p}}(t),\Delta\vec{p}> + \\
&+\frac{1}{2}[<\Delta\vec{x},H_{xx}(t)\Delta\vec{x}> + <\Delta\vec{x},H_{xp}(t)\Delta\vec{p}> + <\Delta\vec{p},H_{px}(t)\Delta\vec{x}> + \\
&+ <\Delta\vec{p},H_{pp}(t)\Delta\vec{p}>]\}\phi + O(\hbar^{3/2}) = \{-i\hbar\partial_t + \hat{H}_0(t)\}\phi + O(\hbar^{3/2}) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, для решений вида (21) в рассматриваемом приближении линейное ассоциированное уравнение Шредингера (20) принимает вид

$$\{-i\hbar\partial_t + H_0(t)\}\phi = 0, \tag{24}$$

где оператор $H_0(t)$ определяется из (23) и является квадратичным по операторам $\Delta\vec{x}$, $\Delta\vec{p}$. Решения уравнения (24) хорошо известны (см., например, [6,7], а также [8]), в частности, известен явный вид оператора эволюции $U_{H_0}(t,s)$, действие которого на некоторую функцию $\varphi(\vec{x},\hbar)$, отнесенную к начальному моменту *t*=*s*, задается выражением

$$\varphi(\vec{x},t,\hbar) = U_{H_0}(t,s)\varphi(\vec{x},\hbar) = \int\limits_{\Re^n} G_{H_0}(\vec{x},\vec{y},t,s)\varphi(\vec{y},\hbar)d\vec{y}\,. \tag{25}$$

Здесь функция Грина $G_{H_0}(\vec{x},\vec{y},t,s)$ линейного уравнения (24) определяется условиями

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{H}_0(t)\}G_{H_0}(\vec{x},\vec{y},t,s) = 0, \quad \lim_{t\to s} G_{H_0}(\vec{x},\vec{y},t,s) = \delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

Решение уравнения (24) завершает общую схему построения главного члена квазиклассической асимптотики (16) нелинейного уравнения (1) в классе решений вида (21) линейного ассоциированного уравнения (20). Мы не будем здесь детально описывать построение явных решений уравнения (24) (они могут быть получены, следуя, например, работе [6]), а остановимся лишь на некоторых особенностях рассматриваемой задачи.

Прежде всего отметим, что величины: вектор нормали $\vec{\pi}(t)$, фазовая траектория $(\vec{P}(t), \vec{X}(t))$, матрицы Q_1(t), Q_2(t), входящие в определение класса функций (10), (11), определяются системой

$$\dot{\vec{P}} = -H_{\vec{x}}(\vec{P}, \vec{X}, t) + Q_2 H_{pp}(\vec{P}, \vec{X}, t)\vec{\pi}, \quad \dot{\vec{X}} = H_{\vec{p}}(\vec{P}, \vec{X}, t), \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\pi}} &= -[H_{xp}(\vec{P}, \vec{X}, t) + Q_1 H_{pp}(t)]\vec{\pi} \\ \dot{\vec{Z}} &= H_{px}(\vec{P}, \vec{X}, t)\vec{Z} + H_{pp}(t)\vec{W} \\ \dot{\vec{W}} &= -H_{xx}(\vec{P}, \vec{X}, t)\vec{Z} - H_{xp}(\vec{P}, \vec{X}, t)\vec{W} \end{aligned}. \tag{27}$$

Здесь $\vec{W}(t) = Q(t)\vec{Z}(t) = (Q_1(t) + iQ_2(t))\vec{Z}(t)$. Система (27) называется системой в вариациях в векторной форме и имеет в общем случае n комплексных линейно независимых решений, которые запишем в виде $2n$ - мерных векторных столбцов

$$a_j(t) = (\vec{W}_j, \vec{Z}_j)^T, \; j=1,\ldots,n. \tag{28}$$

Последние определяют линейные по координатам и импульсам операторы симметрии

$$a_j(t) = N_j[<\vec{Z}_j, \Delta\vec{p}> - <\vec{W}_j, \Delta\vec{x}>] \tag{29}$$

уравнения Шредингера (24), поскольку условия $-i\hbar\partial_t a_j(t) + [H_0(t), a_j(t)] = 0$ удовлетворяются в силу (27), здесь $[H_0(t), a_j(t)] = H_0(t)a_j(t) - a_j(t)H_0(t)$. Нормировочные постоянные N_j выбираются из следующих соображений. Обозначим через $B(t)$ и $C(t)$ матрицы размера $(n\times n)$, столбцы которых составлены из векторов решения системы в вариациях (27), $B(t)$ = $(\vec{W}_1(t),\ldots,\vec{W}_n(t))$, $C(t) = (\vec{Z}_1(t),\ldots,\vec{Z}_n(t))$, $Q(t) = B(t)C^{-1}(t)$. Матрицы $B(t)$, $C(t)$ обладают следующим свойством: матрица $D_0(t)=(1/2i)[C^+(t)B(t)-B^+(t)C(t)]$ не зависит от t, т.е. $D_0(t)= D_0(0)= D_0$. Здесь C^+ эрмитовски сопряжена к C, а B^+ - к B. Кроме того, если в начальный момент t=0 матрицу $Q(0)= B(0)\,C^{-1}(0)$ выбрать симметричной, $Q(0)=Q(0)^T$, то $Q(t)=Q(t)^T$. Выберем матрицу D_0 диагональной, положив D_0= diag(d_1, d_2, …, d_{n-1},0), d_j>0 и

N_j=$(2\hbar d_j\}^{-1/2}$, N_n=1. Тогда операторы (29) удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям, $[a_j(t)a_k(t)] = \delta_{jk}$, j,k=1,… ,n-1, остальные коммутаторы равны нулю.

С помощью операторов симметрии (29) можно в явном виде построить класс $\mathrm{K}^t_\hbar$ решений линейного ассоциированного уравнения Шредингера (24), для которых соответствующие им асимптотические решения (16) удовлетворяют условию (13), причем оператор эволюции $U_{H_0}(t,s)$ не выводит функции из класса $\mathrm{K}^t_\hbar$.

Оператор эволюции $U_{H_0}(t,s)$ линейного уравнения (24) естественным образом индуцирует оператор эволюции $U_L(t,s,\cdot)$ нелинейного уравнения (1) в классе функций $\mathrm{S}^t_\hbar$. Действительно, пусть функция $\varphi(\vec{x},\hbar)$ отнесена к начальному моменту s и принадлежит классу $\mathrm{K}^t_\hbar$. Согласно (19) ей соответствует функция $\Psi_s(\vec{x},\hbar)$ вида (16). Тогда функции $\varphi(\vec{x},t,\hbar)$, определяемой равенством (25), аналогично соответствует функция $\Psi(\vec{x},t,\hbar)$, что формально можно записать как результат действия оператора эволюции $U_L(t,s,\cdot)$ на начальную функцию $\Psi_s(\vec{x},\hbar)$,

$$\Psi(\vec{x},t,\hbar) = U_L(t,s,\Psi_s)(\vec{x},t,\hbar)\,. \tag{30}$$

С помощью операторов эволюции $U_{H_0}(t,s,\cdot), U_L(t,s,\cdot)$ вида (25), (30) определим в квазиклассическом приближении операторы симметрии нелинейного уравнения (1).

Выберем в начальный момент t=s в классе $\mathrm{K}^t_\hbar$ функцию $\varphi(\vec{x},\hbar)$. Построим функцию $\varphi(\vec{x},t,\hbar)$ по формуле (19) и соответствующее решение $\Psi(\vec{x},t,\hbar)$ нелинейного уравнения (1) согласно (19). Пусть оператор A, действует на классе $\mathrm{K}^t_\hbar$, A:

$K_\hbar^t \to K_\hbar^t$. Очевидно, оператор A следует подчинить условию $[A, a_n(s)] = 0$. Тогда $\varphi_A(\vec{x},\hbar) = A\varphi(\vec{x},\hbar) \in K_\hbar^t$ и решение $\Psi_A(\vec{x},t,\hbar)$ нелинейного уравнения (1), построенное по формулам (19), можно рассматривать как результат действия оператора симметрии A_{nl} нелинейного уравнения (1): $\Psi_A(\vec{x},t,\hbar) = A_{nl}\Psi(\vec{x},t,\hbar)$.

В заключение отметим, что, как известно [9], многомерные локализованные в начальный момент времени решения НУШ (1) с фокусирующей нелинейностью неустойчивы и в процессе эволюции возникает коллапс функции Ψ. Квазиклассические асимптотики (16) ведут себя аналогичным образом. Асимптотики вида (16) для конкретных внешних полей удается построить лишь на конечных временных интервалах, в течение которых в решении возникают особенности характерные для явления коллапса. В поведении квазиклассических асимптотик имеется и ряд других особенностей, анализ которых требует дополнительного исследования и выходит за рамки данной работы.

Работа частично поддержана грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-1743.2003.2 и МД-246.2003.02

Список литературы:

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118-134.
2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. - М.: Наука, 1980.
3. Shapovalov A.V. , Trifonov A.Yu. Semiclassical Solutions of the Nonlinear Schrodinger Equation . J. Nonlin. Math. Phys. 1999. V. 6, No 2. P.1-12.
4. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.- М.: Наука, 1977.
5. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. Общий подход. Теор. мат. физ. 1988. Т. 92, № 2. С.215-254.

6. Малкин М.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. - М.: Наука, 1979.
7. Попов М.М. Функции Грина уравнения Шрёдингера с квадратичным потенциалом. Пробл. мат. физ. 1973. Вып. 6. С. 119-125.
8. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrodinger type. Ann. of Phys. (NY). 1996. V. 246, № 2. P. 231-280.
9. Захаров В.Е., Сынах В.С.О характере особенности при самофокусоровке. Журн. эксперим. теор. физ. 1975. Т. 68, вып. 3. С. 940-947.

SEMICLASSICAL APPROXIMATION FOR THE NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION WITH EXTERNAL FIELD

Borisov A. V., Trifonov A. Yu., Shapovalov A. V.

(Russia, Tomsk)

Ideas of the complex germ theory are used to construct analytical solutions, asymptotic in a small parameter $\hbar$, $\hbar \to 0$, for the multidimensional nonlinear Schrodinger equation (NLSE) with an external field and local cubic nonlinearity. The asymptotics are looked for in a class of functions concentrated in a neighborhood of an unclosed surface associated with a phase curve that describes evolution of the surface vertex. Functions of the class have the NLSE - one-soliton form in the direction of the surface normal. A semiclassical linearization is realized for the NLSE to $O(\hbar^{3/2})$, $\hbar \to 0$, and a linear associated Schrodinger equation is obtained.