ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ВЯЗКОУПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОСРЕДСТВОМ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО БУФЕРА

Россихин Ю. А., Шитикова М. В., Локтев А. А.

(Россия, Воронеж)

Данная работа посвящена математическому моделированию удара твердого тела о буфер, обладающий физической нелинейностью и установленный на тонкую плиту. Динамическое поведение тонкой пластинки описывается уравнениями, учитывающими инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, также принимаются во внимание вязкоупругие свойства материала при сдвиговых деформациях. При взаимодействии тела с пластинкой в последней начинают распространяться квазипродольная и квазипоперечная волны, представляющие собой поверхности сильного разрыва. За фронтами этих волн решение строится в виде лучевых рядов, коэффициентами которых служат скачки производных по времени от искомых функций различных порядков, а переменной величиной — время, прошедшее с момента прихода волны в заданную точку пластинки.

1. Введение

В представляемой работе процедура, предложенная в [1] для исследования поперечного удара о нелинейно упругий буфер, установленный на упругую пластину, обобщена к случаю ударного взаимодействия твердого тела с нелинейно упругим буфером и вязкоупругой пластинкой. При этом используется волновой подход, связанный с распространением волновых поверхностей разрыва в контактирующей плите, а в качестве метода решения применяется лучевой метод, основанный на геометрических и кинематических условиях совместности и лучевых рядах, а также метод сращивания асимптотических разложений, полученных для малых времен в зоне контакта и вне ее. Используя

Раздел 7. Вычислительные методы и математическое моделирование Part 7. Calculation methods and mathematical modelling

этот подход в работе [2] выполнен динамический расчёт пластинок Уфлянда-Миндлина, испытывающих поперечное воздействие упругих цилиндрических и сферических тел.

Целью исследования является изучение влияния вязкоупругих свойств материала пластинки и нелинейно упругих свойств буфера на динамические характеристики контактного взаимодействия.

2. Постановка задачи и определяющие уравнения

Твердое тело массой *m* подлетает к свободному концу пружины со скоростью V_0 , другой конец которой жёстко заделан в пластинке. При этом предполагается, что тело движется вдоль оси пружины, которая перпендикулярна пластинке (рис. 1а). Поведение пружины, которая не теряет устойчивость при деформации, подчиняется нелинейно упругому закону. Вязкоупругие свойства материала при сдвиговых деформациях учитываются путём представления модуля сдвига и, следовательно, модуля Юнга в виде оператора, а закон Гука приобретает интегральную форму с произвольным ядром релаксации, коэффициент Пуассона не зависит от вязкоупругих свойств материала.

Динамическое поведение вязкоупругой изотропной пластинки Уфлянда-Миндлина [1, 2] с учётом вязкоупругих свойств материала при сдвиговых деформациях в полярной системе координат описывается следующими уравнениями:

$$\frac{1}{r} \left(M_r - M_{\varphi} \right) + \frac{\partial M_r}{\partial r} + Q_r = \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\beta}_r, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} = \rho h \dot{W} \tag{2}$$

$${}^{\square}_{Mr} = -D_{\infty} \left[\left(\frac{\partial \dot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma \frac{\dot{\beta}_r}{r} \right) - \int_0^t g(t - t') \left(\frac{\partial \ddot{\beta}_r}{\partial r} + \sigma \frac{\ddot{\beta}_r}{r} \right) dt' \right],$$
(3)

$${}^{\square}_{M_{r}} = -D_{\infty} \left[\left(\frac{\partial \dot{\beta}_{r}}{\partial r} + \sigma \frac{\dot{\beta}_{r}}{r} \right) - \int_{0}^{t} g\left(t - t' \right) \left(\frac{\partial \ddot{\beta}_{r}}{\partial r} + \sigma \frac{\ddot{\beta}_{r}}{r} \right) dt' \right], \tag{4}$$

$${}^{\square}_{M_{\varphi}} = -D_{\infty} \left[\left(\frac{\dot{\beta}_{r}}{r} + \sigma \frac{\partial \dot{\beta}_{r}}{\partial r} \right) - \int_{0}^{t} g\left(t - t' \right) \left(\frac{\ddot{\beta}_{r}}{r} + \sigma \frac{\partial \ddot{\beta}_{r}}{\partial r} \right) dt' \right], \tag{4}$$

$${}^{\square}_{Q_{r}} = K\mu_{\infty}h\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \dot{\beta}_{r}\right) - \int_{0}^{t}g\left(t - t'\right)\left(\frac{\partial \dot{W}}{\partial r} - \ddot{\beta}_{r}\right)dt'\right],$$
(5)

Россихин Ю. А. и др. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 711 – 713 Rossikhin Yu. A. et al. — МСЕ — 2005, vol. 2, p. 711 – 713

где
$$D_{\infty} = E_{\infty} (1 - \sigma^2)^{-1} h^3 / 12, \ \mu_{\infty} = \frac{E_{\infty}}{2(1 + \sigma)}, \ g(t - t') = 1 - e^{-\frac{t - t'}{\tau}}, \ r \ и \ \varphi$$
 —

полярные радиус и угол, M_r и M_{φ} — изгибающие моменты, Q_r — перерезывающая сила, $\dot{\beta}_r$ — угловая скорость вращения нормали к срединной поверхности пластинки в направлении r, $W = \dot{w}$ — скорость прогиба, ρ — плотность, $K = \pi^2/12$, μ — модуль сдвига, σ — коэффициент Пуассона, g(t) — функция релаксации для модели Максвелла, t' — переменная интегрирования, t — время, E_{∞} и μ_{∞} — нерелаксированные значения модуля Юнга и модуля сдвига соответственно, точка над величинами означает производную по времени.

3. Основы лучевого метода

Предположим, что в результате поперечного удара по пластинке в ней распространяются продольные и сдвиговые волны, фронты которых являются поверхностями сильного разрыва. Отметим, что в пластинке поверхности сильного разрыва представляют собой цилиндрические поверхности-полоски, образующие которых параллельны нормали к срединной поверхности, т.е. оси x_3 , а направляющие, расположенные в срединной плоскости, представляют собой окружности, расширяющиеся с нормальными скоростями $G^{(\alpha)}$ (индекс α принимает значение 1 и 2 и означает номер волны). Некоторая искомая функция $Z(x_{\alpha}, t)$ за фронтом волновой поверхности Σ представляется в виде лучевого ряда

$$Z(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big[Z_{r(k)} \Big]_{t=r/G} \left(t - \frac{r - r_0}{G} \right)^k H \left(t - \frac{r - r_0}{G} \right)$$
(6)

где $[Z_{,(k)}] = Z^+,_{(k)} - Z^-,_{(k)} = [\partial^k Z / \partial t^k] - скачки производных$ *k*-го порядка по времени*t*от искомой функции*Z* $на волновой поверхности <math>\Sigma$, т.е. при $t = (r - r_0)/G^{(\alpha)}$, r_0 – начальный радиус, верхние индексы «+» и «-» означают, что величина вычисляется непосредственно перед и за волновым фронтом соответственно, H(t) – единичная функция Хевисайда, r – длина дуги, отсчитываемая вдоль луча.

Для определения коэффициентов лучевого ряда (6) для искомой функции необходимо продифференцировать определяющие уравнения (1-5) для пластинки k раз по времени, взять их разность на различных сторонах волновой поверхности Σ и применить условие

Раздел 7. Вычислительные методы и математическое моделирование Part 7. Calculation methods and mathematical modelling

совместности для скачков k+1-го порядка от функции Z по времени t, которое во многих практически важных случаях для физических компонент искомых величин имеет вид [3]

$$G\left[\frac{\partial Z_{(k)}}{\partial s}\right] = -\left[Z_{(k+1)}\right] + \frac{\delta\left[Z_{(k)}\right]}{\delta t},\tag{7}$$

где r — пространственная координата вдоль прямого луча, а остальные две пространственные координаты являются одновременно и поверхностными координатами на волновой поверхности, при этом все три координатные линии являются взаимно ортогональными, $\delta/\delta t$ - δ -производная по времени.



Рис. 1. Схема ударного взаимодействия твердого тела и буфера, установленного на пластинке Уфлянда-Миндлина а) До взаимодействия; б) После взаимодействия в) Вид сверху

Россихин Ю. А. и др. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 711 – 715 Rossikhin Yu. A. et al. — МСЕ — 2005, vol. 2, p. 711 – 715

В результате из уравнений движения (1), (2) получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений, решая которую можно получить скачки искомых величин с точностью до произвольных констант:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\rho h^3 G^2}{12D} \end{pmatrix} \omega_{(k+1)} = 2 \frac{d\omega_{(k)}}{dt} + Gr^{-1} \omega_{(k)} + \omega_{(k)} \Gamma(0) + b G X_{(k)} + F_{1(k-1)}, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\rho G^2}{K\mu} \end{pmatrix} X_{(k+1)} = 2 \frac{dX_{(k)}}{dt} + Gr^{-1} X_{(k)} + X_{(k)} \Gamma(0) - G\omega_{(k)} + F_{2(k-1)}, \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{split} F_{1(k-1)} &= -\frac{d^2 \omega_{(k-1)}}{dt^2} - Gr^{-1} \frac{d \omega_{(k-1)}}{dt} + G^2 r^{-2} \omega_{(k-1)} - bG \frac{dX_{(k-1)}}{dt} + bG^2 \omega_{(k-1)} + \\ &+ \left(-2 \frac{d \omega_{(k-1)}}{dt} - Gr^{-1} \omega_{(k-1)} + Gr^{-1} \frac{d \omega_{(k-2)}}{dt} - G^2 r^{-2} \omega_{(k-2)} + \frac{d^2 \omega_{(k-2)}}{dt^2} - bGX_{(k-1)} \right) + \\ &+ \left(bG \frac{dX_{(k-2)}}{dt} - bG^2 \omega_{(k-2)} \right) \Gamma(0) + Gr^{-1} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d \omega_{(i)}}{dt} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - \\ &- Gr^{-1} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(Gr^{-1} \omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d \omega_{(i)}}{dt} \right) \Gamma(0)_{(k-i-1)} + \\ &+ \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-\omega_{(i+1)} + \frac{d \omega_{(i)}}{dt} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} + bG \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} \right), \\ F_{2(k-1)} &= G \frac{d \omega_{(k-1)}}{dt} - \frac{d^2 X_{(k-1)}}{dt^2} - Gr^{-1} \frac{dX_{(k-1)}}{dt} + G^2 r^{-1} \omega_{(k-1)} + \left(-2 \frac{dX_{(k-1)}}{dt} \right) + \\ &+ \left(G\omega_{(k-1)} + \frac{d^2 X_{(k-2)}}{dt^2} - G \frac{d \omega_{(k-2)}}{dt} - Gr^{-1} X_{(k-1)} \right) + \\ &+ \left(Gr^{-1} \frac{dX_{(k-2)}}{dt} - G^2 r^{-1} \omega_{(k-2)} \right) \Gamma(0) - \sum_{i=0}^{i=k-2} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-1)} + \\ &+ \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} X_{(k-1)} \right) + \\ &+ \left(Gr^{-1} \frac{dX_{(k-2)}}{dt} - G^2 r^{-1} \omega_{(k-2)} \right) \Gamma(0) - \sum_{i=0}^{i=k-2} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} X_{(k-1)} \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} + Gr^{-1} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} Z_{(i+1)} + Gr^{-1} Z_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} + Gr^{-1} \sum_{i=0}^{i=k-3} \left(-X_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} Z_{(i+1)} + Gr^{-1} Z_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} Z_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} Z_{(i+1)} + Gr^{-1} Z_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)} - Gr^{-1} Z_{(i+1)} + \frac{dX_{(i)}}{dt} - G\omega_{(i)} \right) \Gamma(0)_{(k-i-2)}$$

чальный момент времени t = 0.

При выводе уравнений (8) и (9) учитывался осесимметричный характер задачи и, следовательно, независимость волновых характеристик от угла φ . Ограничимся в дальнейшем пятью членами лучевого ряда для искомых функции. Полагая в (8) и (9) k = -1, 0, 1, 2, 3,

Раздел 7. Вычислительные методы и математическое моделирование Part 7. Calculation methods and mathematical modelling

получим скачки соответствующего порядка на первой и второй волнах.

Для иллюстрации процедуры получения скачка произвольного порядка по времени приведём схему определения разрывов нулевого и первого порядка на первой и второй волнах.

Полагая k = -1, из (8) и (9) находим на первой волне (квазипродольной)

$$\rho G^{(1)2} = E(1 - \sigma^2)^{-1}, \ \omega^{(1)}_{(0)} \neq 0, X^{(1)}_{(0)} = 0,$$
(10)

и на второй волне (квазисдвиговой)

$$\rho G^{(2)2} = K \mu, \quad \chi^{(2)}_{(0)} \neq 0, \\ \omega^{(2)}_{(0)} = 0.$$
(11)

Интегрируя (8) при k = 0, получим

$$\omega_{(0)}^{(1)} = c_0^{(1)} r_1^{-1/2} e^{-1/2\Gamma(0)t}, \qquad (12)$$

а из (9) получаем алгебраическое выражение для $X_{(1)}^{(1)}$

$$X_{(1)}^{(1)} = -\frac{c_0^{(1)}}{f} G^{(1)} r_1^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\Gamma(0)t}\right),$$
(13)

где $f = 1 - EK^{-1}\mu^{-1}(1-\sigma^{-2})^{-1}$, $c_0^{(1)}$ — произвольная постоянная, $r_{\alpha} = G^{(\alpha)}t + r_0 \ (\alpha = 1, 2)$.

Для определения недостающего скачка необходимо подставить известные величины $\omega_{(0)}^{(1)}$ и $X_{(1)}^{(1)}$ в (8) при k = 1. В результате по-

лучим

$$\omega_{(1)}^{(1)} = \left[c_1^{(1)} r_1^{-1/2} + \frac{3}{8} c_0^{(1)} G^{(1)} r_1^{-3/2} - \frac{1}{2} c_0^{(1)} \frac{b}{e} G^{(1)} r_1^{1/2} - \frac{3}{8} \frac{\Gamma(0)^2 c_0^{(1)}}{G^{(1)}} r_1^{1/2} \right] \exp(-1/2\Gamma(0)t),$$
(14)

где $c_1^{(1)}$ - произвольная постоянная.

Аналогичным образом на второй волне находим

$$X_{(0)}^{(2)} = c_0^{(2)} r_2^{-1/2} \exp(-1/2\Gamma(0)t), \ \omega_{(1)}^{(2)} = c_0^{(2)} b e^{-1} G^{(2)} r_2^{-1/2} \exp(-1/2\Gamma(0)t),$$
(15)
$$X_{(1)}^{(2)} = \left[c_1^{(2)} r_2^{-1/2} - \frac{1}{8} c_0^{(2)} G^{(2)} r_2^{-3/2} + \frac{1}{2} c_0^{(2)} b e^{-1} G^{(2)} r_2^{1/2} - \frac{3}{8} \frac{\Gamma(0)^2 c_0^{(2)}}{G^{(2)}} r_2^{1/2} \right] \exp(-1/2\Gamma(0)t),$$
(16)

Из описанной схемы следует, что основные величины, т.е. величины, определяющие в основном характер квазиобъёмной волны, получаются Россихин Ю. А. и др. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 711 – 717 Rossikhin Yu. A. et al. — МСЕ — 2005, vol. 2, p. 711 – 717

из решения дифференциальных уравнений, а сопутствующие величины – алгебраическим путём. Скачки на первой и второй волнах при k = 2,3 также были подсчитаны, но не приводятся в виду их громоздкости. Найденные скачки позволяют записать выражения для искомых функ-

ций W и Q_r в виде отрезков лучевых рядов с точностью до коэффициентов, которые определяются из граничных условий:

$$W \simeq \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} X_{(k)}^{(\alpha)} (y_{\alpha})^{k} H(y_{\alpha}),$$
(17)

$$Q_{r} \cong K\mu h_{a=J}^{2} \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \left[\left(-X_{(k)}^{(a)} G^{(a)-l} + \frac{dX_{(k-l)}^{(a)}}{dt} G^{(a)-l} - \omega_{(k-l)}^{(a)} \right) + \left(-X_{(k-l)}^{(a)} G^{(a)-l} + \frac{dX_{(k-2)}^{(a)}}{dt} G^{(a)-l} - 0 \right) \right]$$

$$\left[\left(-\omega_{(k-2)}^{(a)} \right) I^{\prime}(0) + \sum_{k=0}^{l=k-2} \left(-X_{(l)}^{(a)} G^{(a)-l} + \frac{dX_{(l-1)}^{(a)}}{dt} G^{(a)-l} - \omega_{(l-1)}^{(a)} \right) I^{\prime}(0)_{(k-l-1)} \right] V_{a}^{k} H(y_{a}),$$
(18)

 $\begin{bmatrix} (& (k-2) & (k-2)$

считываются при $y_{\alpha}=0$.

4. Определяющая система уравнений

Процесс взаимодействия ударника с буфером и плитой можно описать следующими уравнениями:

$$m_{y=-P(t)},\tag{19}$$

$$\rho h \pi r_0^2 w = 2\pi r_0 Q_r + P(t), \tag{20}$$

где $y = \alpha + w$ – полное перемещение ударника, которое складывается из перемещений α верхнего и w нижнего концов буфера,

 $P(t) = E_1 (\alpha - w) + E_2 (\alpha - w)^3$,(21)

где *E*₁, *E*₂ – коэффициенты линейной и нелинейной жесткости пружины соответственно.

Подставляя величины у и *P*(*t*) в уравнения (19) и (20) и учитывая условие горизонтальности касательной к срединной поверхности плиты в граничных точках области контакта, приходим к системе уравнений, которая определяет процесс взаимодействия ударника и плиты:

$$\begin{split} m \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{w} \\ \alpha + w \end{pmatrix} &= -E_1(\alpha - w) - E_2(\alpha - w)^3, \\ \rho h \pi r_0^2 \overset{\bullet}{w} &= 2\pi r_0 Q_r + E_1(\alpha - w) + E_2(\alpha - w)^3, \\ \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= 0, \end{split}$$
(22)

Раздел 7. Вычислительные методы и математическое моделирование Part 7. Calculation methods and mathematical modelling

К этой системе уравнений необходимо присоединить начальные условия

$$\dot{\mathbf{a}}_{|_{t=0}} = V, \quad \dot{\mathbf{a}}_{|_{t=0}} = 0.$$
 (23)

Для решения системы уравнений (22) представим функции, входящие в нее, в виде степенных рядов по времени *t*. С этой целью запишем лучевые ряды (17), (18) для *w* и Q_r на границе области контакта, т.е. при $r = r_0$, а функцию α представим в виде $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5$, (24)

где α_i (*i* = 0, 1, 2, 3, 4, 5) – пока неизвестные константы. Подставляя соотношения (17) и (18), записанные на границах области контакта, и (24) в уравнения (22) и приравнивая коэффициенты в полученных выражениях при одинаковых степенях *t*, на каждом шаге приходим к системе трех алгебраических уравнений для определения трех

неизвестных констант $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ (*j*=0,1,2) и α_i (*i* = 0,1,2,3,4). В результате получим

$$\alpha_3 = -\frac{E_l V_0}{6} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\rho h \pi r_0^2} \right), \quad \alpha_2 = 0, \ X_{(1)}^{(1)} = 0, \ c_0^{(1)} = 0, \ X_{(1)}^{(2)} = 0, \ c_1^{(2)} = 0,$$
(25)

$$c_{1}^{(1)} = -\frac{E_{1}V_{0}f}{\rho h \pi r_{0}^{3/2} \left(G^{(1)} - G^{(2)}\right)}, \quad c_{2}^{(2)} = -\frac{G^{(2)}E_{1}V_{0}}{\rho h \pi r_{0}^{3/2} \left(G^{(1)} - G^{(2)}\right)}, \quad \alpha_{4} = \frac{1}{12} \frac{E_{1}V_{0} \left(G^{(1)} + G^{(2)}\right)}{\rho \pi h r_{0}^{3}}.$$

Найденные постоянные величины α_i (*i* = 0...5), $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ (*i* = 0...3)

позволяют найти зависимость контактной силы от времени. Подставляя в формулу (21) ряды (17) и (24) и учитывая (10)-(18), (25), получаем выражение для безразмерной контактной силы

$$\begin{split} \tilde{P}(\tilde{t}) &= \tilde{V} \left\{ \tilde{t} + K\tilde{t}^3 + \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} \left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right) \frac{\tilde{t}^4}{6} - \frac{\tilde{E}}{\pi \tilde{h}} \left[\left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right)^2 + \frac{\tilde{g}}{3} \left(1 + \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} \right) + \left(\tilde{m} + 2 \right) K \right] \frac{\tilde{t}^5}{20} \right\}, \\ \end{split}$$

$$\begin{split} \Gamma \mathcal{A} \mathbf{C} \quad \tilde{t} &= \frac{G^{(1)}}{r_0} t, \quad \tilde{P} = \frac{P}{E_1 r_0}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{r_0}, \quad \tilde{m} = \frac{\rho h \pi r_0^2}{m}, \quad \frac{G^{(2)}}{G^{(1)}} = \sqrt{\frac{K \mu}{E'}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 - \sigma}{6}}, \quad \tilde{E} = \frac{E_1 / r_0}{E'}, \\ \tilde{V} &= \frac{V_0}{G^{(1)}}, \quad K = \left[\tilde{e} \tilde{V}^2 - \frac{\tilde{E}}{6\pi \tilde{h}} \left(\tilde{m} + 2 \right) \right] \end{split}$$

$$\end{split}$$

гого буфера., $\tilde{e} = \frac{E_2 r_0^2}{E_1}$ — безразмерный параметр нелинейной жесткости

Россихин Ю. А. и др. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 711 – 719 Rossikhin Yu. A. et al. — МСЕ — 2005, vol. 2, p. 711 – 719

буфера, $\tilde{g} = \Gamma(0) \frac{r_0}{G^{(1)}}$ — безразмерный параметр вязкости пластинки при

t=0.

6. Численный анализ

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим численный пример. Принимая во внимание, что $g^{\bullet}(t) = \Gamma(t)$, получим

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$
(27)

где т — время релаксации модели Максвелла.

В расчетах приняты следующие характеристики: $\tilde{m} = 25$, $\sigma = 0.3$, $\tilde{h} = 1$, $\tilde{E} = 1.1 \cdot 10^{-6}$, $\tilde{V} = 8.5 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 2 показана нелинейная зависимость максимальной контактной силы от характеристики скорости удара при $K = 70.67 \cdot 10^{-6}$, кривая 1 подсчитана при $\tilde{g} = 0$, что соответствует упругой пластинке, кривая 2 —

 $\tilde{g} = 0.5$, кривая 3 — $\tilde{g} = 6$, кривая 4 — $\tilde{g} = 10$, кривая 5 — $\tilde{g} = 15$.

Из рис. 2 видно, что при увеличении параметра \tilde{g} максимальные значения контактной силы уменьшаются и жесткая характеристика нелинейности смягчается., а мягкая становится еще более мягкой.

Список литературы:

- Россихин Ю.А, Шитикова М.В., Локтев А.А. (2004), Удар шара о нелинейно упругий буфер, установленный на плите перекрытия, Известия вузов. Строительство. № 11 – 16-22.
- Rossikhin Yu.A. and Shitikova M.V. (1994), A ray method of solving problems connected with a shock interaction, Acta Mechanica, Vol.102, № 1-4, 103-121.
- Rossikhin Yu.A. and Shitikova M.V. (1995), The ray method for solving boundary problems of wave dynamics for bodies having curvilinear anisotropy, Acta Mechanica, Vol. 109, № 1-4. – 49-64.



Рис. 2 Зависимость максимальной контактной силы

INVESTIGATION OF SHOCK INTERACTION OF A SOLID BODY AND VISCOELASTIC ISOTROPIC PLATE BY MEANS OF NONLINEARLY ELASTIC BUFFER

Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Loktev A. A.

(Russia, Voronezh)

The present paper is devoted to mathematical modeling of the impact of a solid body upon a buffer having physical nonlinearity and positioned on a thin plate. The dynamic behaviour of a thin plate is described by the equations taking the rotary inertia and shear deformations into account. As this takes place, viscoelastic properties of the material are considered only for shear deformations. During the interaction of the body with the plate, a quasilongitudinal and quasitransverse waves representing the surfaces of strong discontinuity begin to propagate. Behind the wave fronts, the solution is constructed in terms of ray series representing power series, whose coefficients are the different order discontinuities in the time-derivatives of the required functions, and the variable is the time passed from the moment of arrival of a wave to the given points of the plate.