ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Лужина Л.М., Шивринская Е.В.

(Москва)

В докладе представлены способы реализации тезиса «Математика - язык науки» на некоторых «фигурах высшего пилотажа» из элементарной математики, к которым, безусловно, относятся и конкурсные задачи с параметрами.

PROBLEMS WITH PARAMETERS AS MEANS OF INCREASE OF MOTIVATION OF TRAINING TO MATHEMATICS

Luzhina L.M., Shivrinscaya E.V.

(Moscow)

In the report ways of realization of the thesis «Mathematics - language of a science» on some «figures of aerobatics» from elementary mathematics to which, certainly, competitive problems with parameters concern also are submitted.

Наметившееся в последнее время широкое многообразие школ и классов различного профиля обозначили сегодня особую остроту проблемы преподавания математики. Вопросы: Чему, Кого и Как учить? - звучат сейчас особенно злободневно.

Тенденция к уменьшению количества часов и, как следствие, нарушение математической строгости изложения предмета обедняет преподавание математики. Хотя обилие понятий и фактов из высшей математики, избыточный формализм (другая крайность) и отсутствие междисциплинарных связей могут навсегда отбить интерес к математике у многих еще в школе. А с бурным развитием вычислительной техники возникла еще одна опасность: слишком большое внимание уделяется компьютерной технике, вычислительному процессу без его глубокого осмысления, а не математическому моделированию.

Хотя знакомство с азами математического моделирования и конкретными примерами реализаций тезиса «Математика - язык науки» можно и нужно проводить еще в школе на дополнительных занятиях по математике спецкурса типа «Дополнительные главы математики» или «Конкретная математика». Здесь уместно рассмотреть некоторые аналогии между способами решения конкурсных задач повышенной сложности и методами высшей математики при моделировании различных процессов и явлений в разных областях знаний. Такой подход расширяет и конкретизирует некоторые вопросы концепции непрерывного образования на примере интересных междисциплинарных связей, а также способствует развитию математического образования, формированию естественнонаучного мировоззрения и осознанному подходу к выбору будущей профессии.

В частности на таких занятиях можно перейти от способов решения задач с параметрами на исследование квадратичной функции к типам уравнений математической физики.

Особое внимание уделяется методу решения относительно параметра, для перехода к которому сформулированы прямой и косвенный признаки.

Прямой признак работает в тех случаях, когда в условии задачи или в процессе решения степенная функция нескольких переменных по ряду из них имеет степень больше двух, а по одной из переменных – не выше второй, тогда удобно перейти к последней переменной в качестве независимой. Косвенный признак, как правило, эффективен в тех случаях, когда в условии задачи роли независимой переменной и параметра изначально перепутаны.

Прямой признак характерен для следующей задачи:

Пример 1 (Механико-математический факультет, 1992). *Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству* $(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$ *хотя бы при одном значении* a*, принадлежащем отрезку [-1;2].*

Применение косвенного признака хорошо иллюстрирует задача:

Пример 2 (Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины, 1994). *Найти все значения x, при которых неравенство* $(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$ *выполняется для любого* a*, удовлетворяющего условию* $1<a<3$.

Рассмотрим аналогии между этими темами. Причем даже для интересующихся школьников удобно излагать данный материал от прикладных задач высшей математики к школьным, для того, чтобы показать важность исследования квадратичной функции и спектр применения подобного исследования в практике [1].

Сложность решения параметрических задач заключается в том, что при изменении параметров меняются не только коэффициенты, но и целый ряд других важных характеристик задачи: область допустимых значений, степень и даже тип уравнений, непрерывность, монотонность, периодичность, четность и другие свойства входящих в условие функций. Часто в задачах с несколькими параметрами оказывается, что решение зависит не от каждого параметра в отдельности, а от некоторого их характерного комплекса, например, дискриминанта $D=b^2-4ac$, в исследовании квадратичной функции [2].

Аналогичные сложности возникают и в целом ряде задач механики сплошных сред: газодинамических задач с переходом через звуковой барьер, теории колебаний и устойчивости механических систем, задачах МГД (магнитогидродинамического) – обтекания тел, детонации и горения [1].

Например, большинство задач МГД - обтекания тел сводится к нахождению фундаментального решения уравнения вида

$$\left(\Delta^2-\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial x}\Delta-H^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi=\delta(\vec{r}), \qquad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа, H - число Гартмана, Re - число Рейнольдса, x - координата, вдоль которой направлено внешнее магнитное поле, $\delta(\vec{r})$ - дельта-функция Дирака.

Для нахождения решения этого уравнения на «школьном языке» необходимо квадратичное выражение $\Delta^2-\mathrm{Re}\cdot q\cdot\Delta-H^2\cdot q^2$ относительно переменных Δ и q разложить в произведение линейных по Δ и q множителей. Проще всего это сделать, найдя корни квадратного трехчлена относительно параметра $\mathrm{p} = \Delta / \mathrm{q}$

$$p^2 - \mathrm{Re} \cdot p - H^2 = 0 \iff p_{1,2} = \frac{\mathrm{Re} \pm \sqrt{\mathrm{Re}^2 + 4H^2}}{2},$$

тогда левая часть уравнения (1) представима в виде произведения двух операторов типа Озеена:

$$\left(\Delta^2 - \mathrm{Re} \frac{\partial}{\partial x} \Delta - H^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi = \left(\Delta - p_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\Delta - p_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi ,$$

фундаментальные решения которых хорошо известны в специальной литературе.

Еще большие сложности возникают, когда уравнение в зависимости от параметра или области может менять свой тип. В теории газодинамических плоских безвихревых течений таким характерным примером является уравнение Чаплыгина

$$\frac{1 - M^2}{\rho V} \cdot \psi_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{\rho} \cdot \psi_V \right) = 0 , \qquad (2)$$

тип которого определяется единственным безразмерным параметром $M = V/a$ - числом Маха: эллиптический при M<1 (дозвук), гиперболический при M>1 (сверхзвук). Разрывные решения могут возникать лишь при M>1.

Смена типа уравнения (2) при M=1, что эквивалентно V=$\sqrt{u^2 + v^2}$=a (где a – скорость звука), принципиально меняет свойство его решений и это отражает тот факт, что характер движения в сжимаемых средах резко меняется при переходе через скорость звука. Легко понять, как важно это учитывать пилоту самолета с околозвуковой скоростью, ведь одинаковые действия при дозвуке и сверхзвуке могут приводить к противоположным результатам.

Заметим, что линейное уравнение (2) получено из нелинейного уравнения общего вида, описывающего подобные течения, нетривиальной заменой независимых переменных x, y и искомого потенциала φ на величину скорости V, угол θ полярной системы координат и функцию тока ψ.

В околозвуковом приближении, когда $|M-1|<<1$, с помощью замены $\eta=2c(u-a)$, $\xi=2cv$, c=const и стандартной процедуры замены ролей зависимых и независимых переменных (как в методе решения относительно параметра), можно получить вместо уравнения (2) линейное уравнение Трикоми: $\eta\cdot y_{\xi\xi}-y_{\eta\eta}=0$, тип которого от эллиптического (дозвук при $\eta<0$) меняется на гиперболический (сверхзвук при $\eta>0$) при переходе звуковой линии $\eta=0 \;\Leftrightarrow u=a$.

Многие упруго – пластические задачи механики сплошных сред являются гиперболо - эллиптическими. Но, в отличие от предыдущего случая, здесь в отдельных областях (зоне упругости и пластичности с неизвестной границей между ними) приходится иметь дело не только с уравнениями разных типов, но разных порядков и даже видов дифференциальных операторов.

Прямой аналогией для этого являются конкурсные задачи с параметрами и функциями f и g, которые относятся к существенно разным классам элементарных функций. Как правило, единственной надеждой на решение подобных задач является условие: $\min \mathrm{f}=\max \mathrm{g}$ на заранее неизвестной границе областей изменения этих функций. Причем при использовании данного приема происходит равносильный переход к системе уравнений, стандартные решения которых хорошо известны.

Для рассмотренных примеров из различных разделов механики сплошных сред можно указать аналоги из конкурсных задач по математике.

Пример 3 (Факультет почвоведения, 1988). *Найти все значения параметра p, при каждом из которых существует единственная пара чисел (x,y), удовлетворяющая условиям*

$$\begin{cases} x^2+2px+3p^2+3p+3\le 3\sin y-4\cos y \\ 0\le y\le 2\pi \end{cases}.$$

(Прием $\min f=\max g$ и метод введения дополнительного аргумента, свойство периодичности).

Пример 4 (Механико-математический факультет, 1990). *Найти все значения параметра а, при которых уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.* (Четность по x, min f=max g, смена типа уравнения).

Пример 5 (Экономический факультет, 1990). *Найти все значения параметра a, при которых система*

$$\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+2\sqrt{2}\right)^y-3a=x^2+6x+5 \\ y^2-\left(a^2-5a+6\right)x^2=0 \\ -6\le x\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Смена типа уравнения, четность по y, min f=max g).

Пример 6 (Биологический факультет, 1991). *Найти все значения параметра a, при которых система*

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x \\ (x+y+a\sin^2 z)\left[(1-a)\ln(1-xy)+1\right]=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. (Симметрия переменных x и y, четность косинуса, ОДЗ логарифма, четность по z).

Заметим, что прием min f=max g часто используется при решении ряда задач повышенной сложности и без параметров.

Пример 7 (Географический факультет, 1994). *Решить уравнение*

$$\log_{1/2}\left(tg\pi x+ctg\pi x\right)=8\left(2x^2+3x+1\right).$$

В теориях устойчивости и колебаний большое число задач после ряда математических преобразований сводится к квадратным, биквадратным и другим степенным уравнениям или их системам, аналоги анализа которых можно найти среди конкурсных задач.

В простейшей модели флаттера крыла самолета [1] анализ устойчивости приводит к биквадратному уравнению, которое дает некоторый интервал для частот колебаний. Его граничные значения определяют критические скорости потока (в т.ч. скорость флаттера).

При скорости потока, превышающей скорость флаттера, движение становится колебательным с резко возрастающей амплитудой, что почти мгновенно приводит к разрушению самолета. Дальнейший анализ устойчивости показывает, что неприятности могут возникать и в случаях, когда значения собственных частот колебаний образуют геометрическую или арифметическую прогрессию.

Аналогичные исследования степенных уравнений можно встретить в следующих конкурсных задачах:

Пример 8 (Механико-математический факультет, 1978). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств*

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2 \geq \dfrac{1-a}{a+1} \\ 3x^2+10xy-5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет решение.

Пример 9 (Биологический факультет, 1977). *Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений*

$$\mathrm{x}^2+\frac{3\mathrm{x}}{\mathrm{s}}+2\mathrm{s}=0 \text{ и } \mathrm{x}^2+\frac{12\mathrm{x}}{\mathrm{s}}-\mathrm{s}=0$$

не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Пример 10 (Географический факультет, 1993). *При каких значениях параметра a четыре корня уравнения* $\mathrm{x}^4+(\mathrm{a}-5)\mathrm{x}^2+(\mathrm{a}+2)^2=0$ *являются последовательными членами арифметической прогрессии?*

Смена типа уравнений в зависимости от параметра приводит к уравнениям различного типа с принципиально различными методами решений. Указанные выше примеры не исчерпывают даже малой доли проблем, когда приходится иметь дело с уравнениями разных типов. На этом фоне исследование квадратичной функции с тремя параметрами является одним из важнейших разделов школьной математики, представляя собой почти идеальную модель по отработке многих навыков решения задач высшей математики. Глубокое понимание такого анализа необходимо при решении задач высшей математики и ее приложений.

Литература.

1. Лужина Л.М., Натяганов В.Л., Шивринская Е.В. Научно-исследовательские задачи механики и прикладной математики как аналоги конкурсных примеров с параметрами. – М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. –48 с.
2. Шивринская Е.В. Задачи с параметрами как средство повышения мотивации обучения математике. – МГУ, механико-математический ф-т, дисс. к.п.н., 2002.