О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Гудович А.Н.

(Воронеж)

В работе рассматривается сингулярно возмущенная система абстрактных параболических включений с быстро осциллирующей по времени правой частью и гистерезисной нелинейностью. Для таких систем обосновывается принцип усреднения, являющийся аналогом второй теоремы Н.Н. Боголюбова – Н.М. Крылова. Предположения о свойствах правой части системы позволяют построить компактнозначное, вполне непрерывное многозначное отображение, неподвижные точки которого определяют периодические решения исходной системы. Наличие у построенного многозначного отображения неподвижных точек доказывается с помощью теории вращения вполне непрерывных невыпуклозначных многозначных векторных полей.

AN AVERAGING METHOD FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF SEMILINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH HYSTERESIS NONLINEARITIES

Gudovich A.N.

(Voronezh)

We consider a singularly perturbed system of semilinear parabolic inclusions containing high frequency terms and hysteresis nonlinearity. For such systems we justify the averaging principle, which is an analog of classical averaging theorem of N. N. Bogolyubov – N. M. Krilov. Our assumptions permit to define an upper semicontinuous, compact vector operator whose fixed points determine periodic solutions of original system. The existence of fixed point of

constructed multivalued operator is shown by using topological degree theory.

В последнее время активно изучается динамика систем, математической моделью которых является нелинейное параболическое включение, а обратная связь представляет собой элемент с гистерезисной нелинейностью (см., например, [2], [5]). В настоящей работе для таких объектов изучается задача о периодических решениях. Построенный в [1] операторный подход описания входо-выходных соответствий гистерезисных нелинейностей позволяет применить в этой задаче предложенные в [3] топологические методы исследования нелинейных дифференциальных включений. Эти методы связаны с понятием вращения вполне непрерывных многозначных векторных полей (см. [3]).

Рассматривается система:

$$\begin{cases} x'(t) \in \varepsilon A_1 x(t) + \varepsilon f_1(t, x(t), y(t), w(t)), \\ y'(t) \in A_2 y(t) + f_2(t, x(t), y(t), w(t)), \\ w(t) = \Gamma(w^*) x(t), \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, A_1 и A_2 – производящие операторы аналитических полугрупп $e^{A_1 t}$ и $e^{A_2 t}$, действующих в банаховых пространствах E_1 и E_2, f_1 и f_2 – многозначные отображения, Г- гистерон (см.[1]), w* – начальное состояние гистерона, принадлежащее банахову пространству E_3. Операторы A_1^{-1} и A_2^{-1} предполагаются вполне непрерывными, отображения f_i (i=1,2) являются T–периодическими по времени.

Под решением системы (1) на отрезке [0,T], удовлетворяющим начальному условию

$$x(0) = x^*, \quad y(0) = y^*, \quad w(0) = w^* \tag{2}$$

понимаются обобщенные решения (x_ε, y_ε, w_ε), которые являются непрерывными функциями, заданными на [0,T] со значениями, соответственно, в E_1, E_2 и E_3, удовлетворяющими включениям

$$x_\varepsilon(t) \in \{g_1(t) : g_1(t) = e^{\varepsilon A_1 t} x^* + \int_0^t e^{\varepsilon A_1 (t-s)} \varepsilon v_1(s)\, ds, \quad v_1 : [0,T] \to E_1, \tag{3}$$
$$v_1 - \textit{измерима},\ v_1(s) \in f_1(s, x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s), w_\varepsilon(s))\ \textit{для п.в.}\ s \in [0,T]\},$$

$$y_\varepsilon(t) \in \{g_2(t): g_2(t) = e^{A_2 t} y^* + \int_0^t e^{A_2(t-s)} v_2(s)\,ds, \quad v_2 : [0,T] \to E_2, \tag{4}$$
$$v_2 - \textit{измерима},\ v_2(s) \in f_2(s, x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s), w_\varepsilon(s))\ \textit{для п.в.}\ s \in [0,T]\},$$

$$w_\varepsilon(t) = \Gamma(w^*) x_\varepsilon(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Под периодическими решениями системы (1) будем понимать непрерывные, заданные на $[0,\infty)$ T–периодические функции (x_ε, y_ε, w_ε), которые являются решениями (1) на полуоси $[0,\infty)$.

Предположения, сформулированные ниже, позволяют при $\varepsilon>0$ определить многозначные операторы квазисдвига $U_{\varepsilon T}$: $E_1\times E_2\times E_3 \to E_1\times E_2\times E_3$, неподвижные точки ($x_0$, y_0, w_0) которых задают начальное условие $x(0)=A_1^{-\alpha}x_0$, $y(0)=A_2^{-\alpha}y_0$ и начальное состояние $w(0)=w_0$ T–периодических решений системы (1). Операторы $U_{\varepsilon T}$ являются компактными, полунепрерывными сверху, но не выпуклозначными, поэтому для доказательства существования неподвижных точек этих операторов применяется теория вращения вполне непрерывных векторных полей с обобщенными R_δ–образами (см. [3]).

На аналитические полугруппы e^{A1t} и e^{A2t} накладывается следующее условие:

$\|e^{Ait}\| \le e^{-dit}$, $t\ge 0$, $d_i>0$, $i=1,2$.

Операторы f_i: $R\times E_1\times E_2\times E_3 \to E_i$, i =1,2, предполагаются подчиненными дробным степеням операторов A_i в следующем смысле:

F_1) Операторы $(t, x, y, w) \to f_i(t, A_1^{-\alpha}x, A_2^{-\alpha}y, w)$ действуют из $R\times E_1\times E_2\times E_3$ в $K_v(E_i)$ и для любого $R>0$ существует такая положительная константа ρ_R, что почти всюду на [0,T] выполнено неравенство

$\|f_i(t, A_1^{-\alpha}x, A_2^{-\alpha}y, w)\| \le \rho_R (1+\|x\|_{E1}+\|y\|_{E2})$, ($\|w\|\le R$), i=1,2.

Через $K_v(E_i)$ обозначена совокупность непустых, компактных, выпуклых подмножеств пространства E_i.

F_2) Для всех $(x,y,w)\in E_1\times E_2\times E_3$ существует измеримый селектор многозначного отображения $f_i(\bullet, A_1^{-\alpha}x, A_2^{-\alpha}y, w)$: $[0,T]\to K_v(E_i)$, i=1,2.

F_3) Для почти всех $t\in[0,T]$ многозначные операторы $f_i(t, A_1^-$

${}^{\alpha}\bullet$, $A_2^{-\alpha}\bullet$, $\bullet$): $E_1 \times E_2 \times E_3 \rightarrow K_v(E_i)$, i=1,2 полунепрерывны сверху.

Гистерезисная нелинейность Γ удовлетворяет условиям:

C_1) При любых $t \in [0,T]$ оператор Γ: $E_3 \times C([0,t],E_1) \rightarrow C([0,t],E_3)$.

C_2) Оператор Γ удовлетворяет полугрупповому свойству

$\Gamma(w)u(t)=\Gamma(\Gamma(w)u(t_1))u(t)$, $0 \le t_1 \le t$, $t \ge 0$.

C_3) Оператор Γ удовлетворяет условию Липшица по обеим переменным.

C_4) Существует непустое, выпуклое, компактное множество $K \subset E_3$, такое что если начальное состояние $w \in K$, то $\Gamma(w)x(t) \in K$ при всех $t \ge 0$, при всех $x \in C([0,T],E_1)$.

Требуется также, чтобы были выполнены

D_1) Для любых $x \in E_1$, $w \in K$, $\lambda \in [0,1]$ существует хотя бы одно обобщенное T-периодическое решение y(t) включения

$y'(t) \in A_2 y(t) + \lambda A_2^{\alpha} f_2(t, A_1^{-\alpha}x, A_2^{-\alpha}y(t),w)$.

Совокупность таких решений обозначим через $Y^{\lambda}_{x,w}$.

D_2) Для любого ограниченного множества $\Omega \subset E_1$ множество $\{ Y^{\lambda}_{x,w} \}$, $x \in \Omega$, $w \in K$, $\lambda \in [0,1]$ ограничено.

Определим многозначный усредняющий оператор. Положим

$V=\{v:[0,T] \rightarrow E_1$, v – измерима, $v(t) \in f_1(t, A_1^{-\alpha}x, A_2^{-\alpha}y(t),w)$ почти всюду на $[0,T]$, $y \in Y^1_{x,w}\}$.

Рассмотрим многозначный оператор Φ: $E_1 \times K \rightarrow E_1 \times K$, $\Phi(x,w)=(F(x,w),\Gamma^*(x,w))$, где

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{w}) = \overline{co}\{-A_1^{-1+\alpha}\frac{1}{T}\int_0^T v(s)ds,\ v \in V\},$$

$$\Gamma^*(x,w) = \Gamma(w)A_1^{-\alpha}\overline{u},\ \textit{где}\ \overline{u} \in C([0,T],E_1),\ \overline{u}(t) \equiv x$$

Оператор Φ является компактным, полунепрерывным сверху и выпуклозначным.

Обозначим через P множество $E_1 \times K$. Пусть $M \subset E_1 \times E_3$. Обозначим $M_P = M \cap P$. Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема</u> *Пусть выполнены условия A)-D_2) и пусть существует относительно открытое в P ограниченное множество M_P, такое что $\gamma(I-\Phi, M_P) \neq 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ система (1) имеет по крайней мере одно периодическое реше-*

ние $(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}, w^{\varepsilon}) \in C_T(E_1) \times C_T(E_2) \times C_T(E_3)$, *причем для любой последовательности* ε_n, *сходящейся к нулю, предельными точками последовательности* $(x^{\varepsilon n}, y^{\varepsilon n}, w^{\varepsilon n})$ *может быть лишь* $(A_1^{-\alpha}x^*, A_2^{-\alpha}y^0, w^*)$, *где* (x^*, w^*) *– неподвижная точка отображения* Φ, *а* $y^0 \in Y^1_{x^*,w^*}$.

Литература.

1. 1.Красносельский М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А.В. Покровский. -М.: Наука, 1983. -272с.
2. Friedman A. Periodic solution to a parabolic equation with hysteresis / A. Friedman, L.-S. Jiang // Math. – 1987. – Z.194. – P.61-70.
3. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. -Walter de Gruyter, Almagne, 2001. – 345p.
4. Kamenski M. An averaging method for singularly perturbed systems of semilinear differential inclusions with analytic semigroups / M. Kamenski, P. Nistri // Nonlinear Analysis. – 2002. – P.1-14.
5. Seidman T. Some problems with thermostat nonlinearities / T. Seidman // Proc. 27th IEEE Conf. Decision and Control. – 1988. – P.1255-1259.