ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ С ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

Фахретдинова В.А.

(Псков)

Исследуется задача моделирования многошагового процесса, в котором стороны последовательно принимают решения. Результат взаимодействия для каждого лица представлен конечным набором критериев. Математической моделью такой задачи является позиционная игра N лиц с векторной функцией выигрыша. Для данного класса задач рассматривается равновесие Нэша-Парето. Указанный принцип оптимальности уточнен. Для позиционных игр N лиц с полной памятью с векторной функцией выигрыша установлено существование решения, возможно в смешанных стратегиях.

POSITION GAMES WITH VECTOR-VALUED FUNCTION

Fakhretdinova V.A.

(Pskov)

The problem of multistage process modelling is being investigated. The decisions are made successively in this process. The result of interaction for every person is presented in the limited set of criteria. The mathematical model of this problem is the position game N persons with vector-valued function. Nash-Pareto equilibrium is studied for the given set of problem. It’s proved in the work that solution exist for position games with full memory having a vector-valued function, mixed strategies are possible.

Исследуется процесс взаимодействия (сотрудничества и соперничества) N лиц, причем стороны последовательно принимают решения, располагая различной информацией о действиях других сторон. Особенностью задачи является то, что результат взаимодействия для каждого лица представлен не одним показателем, а конечным набором критериев. Лица независимо принимают решения так, чтобы получить наилучший для себя результат по каждому критерию.

Математической моделью, учитывающей эти особенности, является позиционная игра N лиц с векторной функцией выигрыша

$$\Gamma = < G, A, P, U, f >, \qquad (1)$$

где G – древовидный граф; A – альтернативное разбиение вершин графа по числу ребер, исходящих из вершин; P – разбиение по игрокам; U – информационное разбиение, $f^i = \left(f_1^i, ..., f_{li}^i\right)$ – векторная функция выигрыша i-го игрока $i \in N$.

Рассматриваемая задача имеет следующие особенности:

– во-первых, игра является конечной позиционной, то есть игроки последовательно принимают решения в условиях различной информированности;
– во-вторых, в игре участвуют N рациональных игроков, то есть игроки достаточно разумны и делают оптимальные выборы в пределах своей информированности; кроме того, запрещены переговоры и обязывающие соглашения, не разрешённые правилами игры;
– в-третьих, все ситуации в игре игроки оценивают с помощью нескольких критериев.

Первая особенность приводит к тому, что рассматривается конечная многошаговая игра в формализации, предложенной Куном [1] и в качестве действий игроков рассматриваются позиционные стратегии.

Учитывая вторую и третью особенности, отмеченные выше, в качестве решения позиционной игры с векторной функцией выигрыша Γ предлагается равновесие Нэша-Парето.

Цель игрока $i \in N$ состоит в выборе такой своей стратегии $s_i \in S_i$, чтобы достичь возможно большего значения каждой компоненты векторной функции выигрыша $f^i(s) = \left(f_1^i(s), ..., f_{li}^i(s)\right)$. При выборе стратегии игрок должен учитывать выборы остальных игроков. В бескоалиционных играх N лиц с векторной функцией выигрыша данный подход разрабатывался в [2].

Определение 1. Решение $s^* \in S$ называется равновесием Нэша-Парето игры *Г*, если

$$\forall s_i \in S_i,\ i = 1,\dots,N,\ f^i\left(s^* \| s_i\right) \not\geq f^i\left(s^*\right), \tag{2}$$

где $f^i\left(s^* \| s_i\right) \not\geq f\left(s^*\right)$ означает, что система неравенств $f_i^j\left(s^* \| s_i\right) \geq f_i^j\left(s^*\right),\ j = 1, \dots, l_i$ несовместна, причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

Ситуация равновесия Нэша-Парето имеет тот смысл, что если *i*-игрок, уклонившись от нее в одностороннем порядке улучшил свой результат $f^i\left(s^*\right)$ по крайней мере по одной компоненте, то обязательно найдется другая компонента, по которой его результат ухудшится.

Рассматриваемую конечную позиционную игру *Г* с векторной функцией выигрыша представим в нормальной форме

$$\Gamma = \left< N, \left\{S_i\right\}_{i \in N}, \left\{f^i\left(s\right)\right\}_{i \in N} \right>. \tag{3}$$

Здесь указано множество чистых позиционных стратегий для каждого игрока в игре *Г*, набор стратегий игроков $\left(s^1, s^2, \dots, s^N\right)$ называется ситуацией в игре и множество всех ситуаций $S = \Pi S^i$. Заданы векторные функции $f^i : S \rightarrow R^{l_i}$, которые каждой ситуации ставят в соответствие вектор $f^i\left(s\right) = \left(f_1^{l_1}\left(s\right), \dots, f_{l_i}^i\left(s\right)\right)$ выигрышей игрока.

В случае представления позиционной игры в нормальной форме (3), предложенное решение есть равновесие Нэша-Парето в бескоалиционной игре N лиц с векторной функцией выигрыша [2].

При рассмотрении позиционной игры *Г* на дереве *G* часто используется разложение игры в некоторой позиции *x*. Обозначим через G_x компоненту *G*, которая содержит *x* и получается из *G* удалением ребра, не являющегося альтернативой в *x*. Будем говорить, что игра *Г* разлагается в позиции *x* на $Г_x$ и $Г_D$. Игра $Г_x$ называется *подыгрой,* игра $Г_D$ называется *фактор-игрой.* Деревом подыгры $Г_x$ является граф G_x с вершиной *x*. Деревом фактор-игры $Г_D$ будет G/G_x, дополненная позицией *x*, вершина графа фактор-игры $Г_D$ совпадает с вершиной исходного графа *G*.

Определение 2. Равновесие s^* Нэша-Парето в игре (1) называется абсолютным равновесием Нэша-Партео, если оно оптимально в любой подыгре Γ_x.

Если i-ый игрок $i \in N$ помнит обо всех своих действиях на любом этапе игры (о действиях соперников он может не иметь исчерпывающей информации), то такие игры являются играми с полной памятью.

Утверждение. В игре (1) с полной памятью существует абсолютное равновесие Нэша-Парето, возможно в смешанных стратегиях.

Доказательство. Заменим рассматриваемую задачу (1) многошаговой игрой N лиц с полной памятью Γ со скалярной функцией выигрыша $F^i(s) = \sum_{j=1}^{l_i} f_j^i(s)$.

Выделим в игре Γ все подыгры Γ_x, которые не включают в себя другие подыгры. Представим Γ_x в нормальной форме. В любой подыгре Γ_x существует равновесие $(s^*)^x$, возможно в смешанных стратегиях. Тогда $F(s^*)^x = \left(F^1(s^*)^x, \dots, F^N(s^*)^x\right)$ оптимальный результат в подыгре Γ_x. Соответствующий результат $F(s^*)^x$ припишем позиции x и рассмотрим фактор игру Γ^D. В ней также есть равновесие $(s^*)^D$. Нетрудно показать, что $s^* = \left((s^*)^D, (s^*)^x\right)$ является равновесием по Нэшу во всей игре. Снова выделим в полученной игре все указанные подыгры. Продолжим эту процедуру, пока все такие подыгры не будут исчерпаны. Рассмотрим ситуацию $s^* = \prod_x \left(s^x\right)$. Ситуация s^* является равновесием в игре Γ, причем абсолютным в силу построения. Покажем, что ситуация s^* доставляет абсолютное равновесие Нэша-Парето в игре (1). Действительно, так как s^* есть абсолютное равновесие по Нэшу в игре Γ, то в любой подыгре Γ_x выполнено $F^i(s^*)^x \geq F^i\left(s^* \| s_i\right)^x$. Предположим противное, что s^* не является абсолютным равновесием Нэша-

Парето в игре (1), тогда найдется подыгра $\overline{\Gamma}_x$, в которой не выполнено условие (2) для некоторого игрока *i*, то есть $\forall j\; 1, ..., l_i \quad f_j^i\left(s^* \| \, s_i\right) > f_j^i\left(s^*\right)$. Сложив эти неравенства, получим $F^i\left(s^* \| \, s_i\right)^x > F^i\left(s^*\right)^x$, что противоречит тому, что s^* есть равновесие по Нэшу. Отметим, что поиск стратегии s^* осуществлялся в стратегиях поведения. Так как игра с полной памятью, то можно найти соответствующую смешанную стратегию [1], что и завершает доказательство утверждения.

Литература.

1. Кун Г.У. Позиционная игра и проблема информации // Позиционные игры. – М.: Наука, 1967. С.13-40.
2. Матвеев В.А. Игровая задача с векторным выигрышем // Известия института математики и информатики Удмурдского ун-та. 2001. Вып.1 (21), с.67-82.