

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО НУШ – СОЛИТОНА ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**Борисов А.В., Кистенев Ю.В.,
Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В.**

(Томск)

Рассмотрена динамика солитона в «сильном» внешнем поле для соответствующей модификации нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

Начальное условие отличается от стандартной односолитонной функции для НУШ и определяется внешним полем. Исследование проводилось совместным применением асимптотических ВКБ-решений для НУШ с внешним полем, построенных ранее авторами и методами компьютерного моделирования.

COMPUTER SIMULATION OF ASYMPTOTIC NLSH- SOLITON IN EXTERNAL FIELDS OF SPECIAL FORM

Borisov A.V., Kistenev Yu.V., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V.

(Tomsk)

Soliton dynamics in a “strong” external fields of special forms is considered for the nonlinear Schrodinger equation (NLSE) with external field. The initial condition is differ from the standard NLSE one-soliton form and is determined by the external field. Both computer simulation and asymptotic WKB-type method developed by authors is applied.

Постановка задачи

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\hbar\Psi_t + \frac{\hbar^2}{2}\Psi_{,xx} + 2g|\Psi|^2\Psi = 0, \quad (1)$$

является одним из фундаментальных уравнений нелинейной математической физики. Здесь $\Psi(x, t)$ – комплексное скалярное поле, которое будем полагать гладкой функцией, убывающей при $|x| \rightarrow \infty$; вещественный параметр нелинейности $g > 0$. В обозначениях принятых в квантовой механике вещественный параметр \hbar есть постоянная Планка.

Уравнение (1) интегрируется методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) и имеет солитонные решения (см., например, [1]).

Односолитонное решение НУШ отвечает нулевому коэффициенту отражения и одной точке дискретного спектра $(\xi + i\eta)$ линейной задачи, ассоциированной с нелинейным уравнением (1), и записывается в виде [1]

$$\Psi_s(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2\eta}{ch[\frac{1}{\hbar}(2\eta(x-x_0) - 4\xi\eta t)]} \exp \frac{i}{\hbar} [2(\xi^2 - \eta^2)t + 2\xi x + \varphi_0]. \quad (2)$$

Естественное обобщение НУШ (1) с внешним полем, заданным гладкой функцией $v(x, t)$, записывается следующим образом:

$$i\hbar\Psi_{,t} + \frac{\hbar^2}{2}\Psi_{,xx} + (2g|\Psi|^2 - v(x, t))\Psi = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет интерес в задачах нелинейной оптики неоднородных сред, в теории бозе-эйнштейновского конденсата и некоторых других областях физики. При этом у нас поле $v(x, t)$ не предполагается малым. При некоторых условиях оно обладает решениями солитоноподобного типа, но к нему неприменим МОЗР и теория возмущений солитонов, которая существенно опирается на конструкции МОЗР (см. обзор [2]). Поэтому задача о солитоне в «сильном» внешнем поле требует других подходов.

В работах [3-4] на основе комплексного метода ВКБ-Маслова развит метод построения решений асимптотических по малому параметру \hbar , $\hbar \rightarrow 0$, для многомерных обобщений НУШ с внешними полями и различными видами нелинейности.

В данной работе мы исследуем поведение солитоноподобно-

го решения уравнения (2) для конкретных видов потенциала $v(x)$. Уточним постановку задачи для НУШ с внешним полем (3). В работах, где задача о солитоне во внешнем поле изучается методами теории возмущений [2] в предположении о малости внешнего поля, начальное условие выбирается точное в виде точного односолитонного решения (2) уравнения (1) в момент $t = 0$.

Если внешнее поле $v(x, t)$ не является малым, выбор начального условия в таком виде не представляется достаточно обоснованным, т.к. при $v(x, t) \neq 0$ точные решения уравнения (3) неизвестны, и понятие односолитонного решения, строго говоря, не определено. Очевидно, что если таковое существует в смысле аналогичном тому, что и для уравнения (1), то при $t = 0$ оно не должно совпадать с (2) (при $t = 0$).

Для исследования поставленной задачи следует определить солитоноподобное решение уравнения (3) аналогичное солитонному решению (2) уравнения (1). Из множества локализованных решений уравнения (3) выделим решение, которое при $v \rightarrow 0$ переходит в солитонное решение (2) НУШ (1). Это решение уравнения (3) естественно рассматривать как солитон НУШ, который модулируется внешним полем $v(x, t)$. В данной работе для краткости мы будем называть его *v -солитоном*.

Точное решение для v -солитона неизвестно, поэтому воспользуемся асимптотическими выражениями, полученными в [3], для главного члена v -солитонного решения уравнения (3), асимптотического по малому параметру \hbar , $\hbar \rightarrow 0$, для потенциала, представляющего собой произвольную гладкую функцию переменной x , $v(x, t) = v(x)$. Подчеркнем, что вопросы обоснования асимптотических решений для уравнения (3) представляют самостоятельную математическую проблему, которая в данной работе изучается методами компьютерного моделирования. В частности, показано, что в «сильном» внешнем поле $v(x)$ существуют устойчивые солитоноподобные режимы распространения начального v -солитона для уравнения (3). Показано также качественное соответствие поведения главного члена асимптотического v -солитонного решения. При определенных

значениях параметров поля и начального условия имеется количественное соответствие.

Асимптотическое солитоноподобное решение

Асимптотическое по малому параметру \hbar ($\hbar \rightarrow 0$) v -солитонное решение ВКБ-типа для уравнения (3), согласно [3], с точностью $O(\hbar^2)$ по \hbar ($\hbar \rightarrow 0$) записывается в виде

$$\Psi(x, t, \hbar) = \sqrt{\frac{(\sigma^{(0)},_{,x})^2}{2g}} \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar} (S^{(0)}(x, t) + \hbar S^{(1)}(x, t))\right]}{\cosh \theta} . \quad (4)$$

Здесь $\theta = \frac{1}{\hbar} \sigma^{(0)}(x, t) + \sigma^{(1)}(x, t)$ – «быстрая переменная»; гладкие вещественные функции $S^{(k)}(x, t)$, $\sigma^{(k)}(x, t)$ $k = 0, 1$, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)}(x, t) &= 4\xi\eta \left(\int_{-\infty}^x \left(\frac{1}{V_0(x)} - \frac{1}{2\xi} \right) dx - t \right) + 2\eta(x - x_0), \\ S^{(0)}(x, t) &= 2(\eta^2 - \xi^2)t + \int_{-\infty}^x (V_0(x) - 2\xi) dx + 2\xi x + \varphi_0, \\ \sigma^{(1)},_x &= -\frac{\varepsilon}{2q(x)} (V_0)_{,xx} (48\xi^2\eta^2 V_0^{-3} + V_0), \\ S_{,x}^{(1)} &= 4\xi\eta \frac{\varepsilon}{q(x)} (V_0)_{,xx} V_0^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь также предполагается, что $\xi \neq 0$ (из (4) очевидно, что $\eta \neq 0$) и обозначено:

$$q(x) = 16\xi^2\eta^2 V_0^{-2} + V_0^2, \quad \varepsilon = \text{sign } \theta . \quad (6)$$

Функция $V_0(x)$ связана с потенциалом $v(x)$ соотношением

$$v(x) = \frac{8\eta^2\xi^2}{V_0^2(x)} - \frac{1}{2}V_0^2(x) + 2(\xi^2 - \eta^2) .$$

Отсюда следует

$$V_0^2(x) = -v(x) - 2(\eta^2 - \xi^2) + \sqrt{[v(x) + 2(\eta^2 - \xi^2)]^2 + 16\eta^2\xi^2} . \quad (7)$$

В пределе $v(x) \rightarrow 0$ функции $S^{(k)}(x,t)$, $\sigma^{(k)}(x,t)$ принимают вид

$$S^{(0)} = 2(\eta^2 - \xi^2)t + 2\xi x + \varphi_0, \quad \sigma^{(0)} = -4\xi\eta t + 2\eta(x - x_0),$$

$$S^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0 \quad \text{и главный член асимптотического решения (4)}$$

преобразуется к виду (2), превращаясь в точное односолитонное решение НУШ (1).

Таким образом, главный член асимптотического v -солитонного решения (4) принимает вид

$$\Psi(x,t,\hbar) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{4\xi\eta}{V_0(x)} \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x,t)\right]}{\cosh\theta}. \quad (8)$$

Здесь «быстрая переменная» – аргумент гиперболического косинуса – равна

$$\theta(x,t) = \frac{4\xi\eta}{\hbar} \left(\int_{-\infty}^x \left(\frac{1}{V_0(x)} - \frac{1}{2\xi} \right) dx - t \right) + \frac{2\eta}{\hbar} (x - x_0) + \sigma^{(1)}(x), \quad (9)$$

фаза v -солитонного решения имеет вид

$$S(x,t) = 2(\eta^2 - \xi^2)t + \int_{-\infty}^x (V_0(x) - 2\xi) dx + 2\xi x + \varphi_0 + \hbar S^{(1)}(x). \quad (10)$$

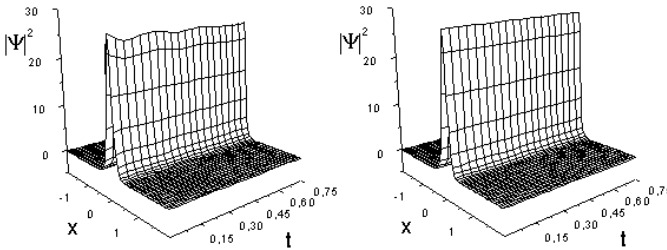
Величине $V(x) = V_0(x) \left(1 + \frac{\hbar}{4\xi\eta} V_0(x) \sigma^{(1)}(x) \right)^{-1} = -\theta_{,t} \theta_{,x}$ можно

придать смысл переменной групповой скорости v -солитона (положив $\theta(x,t) = const$, получим $x = x(t)$ – уравнение движения точки постоянной фазы, тогда $V(x(t))$ – соответствующая скорость). Тогда $V_0(x)$ – скорость в нулевом по \hbar ($\hbar \rightarrow 0$) приближении. Функция $V_0(x) \rightarrow 2\xi$ при $v(x) \rightarrow 0$. Это означает, что при исчезновении поля $v(x)$ скорость v -солитона переходит в скорость НУШ – солитона (2) равную 2ξ . В следующем разделе мы приводим результаты компьютерного моделирования динамики v -солитона уравнения (3). Это означает, что в качестве начального условия для уравнения (3) выбирается функция $\Psi(x,0)$, вид которой определяется выражениями (4)-(10). Резуль-

таты компьютерного моделирования сопоставлены с асимптотическими выражениями (4)-(10) для v -солитона при $t > 0$, причём интегралы в (9), (10) находились численно.

Компьютерное моделирование

Компьютерное моделирование проводилось при следующих условиях. Шаг по координате x равен 0.05, шаг по времени t равен 0.0000025. Значения параметров уравнения $g=1$, $\hbar=1$, величины $\sigma^{(1)}$, $S^{(1)}$ в асимптотических формулах не учитывались. Во всех случаях начальное условие $\Psi(x,0)$ выбиралось в виде (9)-(10) для соответствующего поля $v(x)$. Контроль за корректностью численного решения проводился по величине нормы Ψ ($\|\Psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx$), которая является интегралом уравнения (3).



а Численное решение

б Асимптотическое решение

Рис. 1. Потенциал: $v(x) = 10\exp(-x^2)$, $\eta = 3$, $\xi = 10^{-7}$

На *Рис. 1а* приведен график численного v -солитонного решения НУШ (3) с внешним полем в виде барьера $v(x) = 10\exp(-x^2)$. На *Рис. 1б* показано соответствующее асимптотическое решение. Из их сопоставления следует, что в указанной на графиках области асимптотическое решение согласуется с численным. Локализация численного решения зависит от величины η , соответственно область применимости асимптотического решения также зависит от этой величины. При малом η численное решение быстро (на коротком интервале t) распадается, но при большом η оно остается локализованным долго (на

много большем интервале t). Это позволяет предположить наличие порогового условия существования v -солитона, аналогичного известному пороговому условию существования НУШ-солитона.

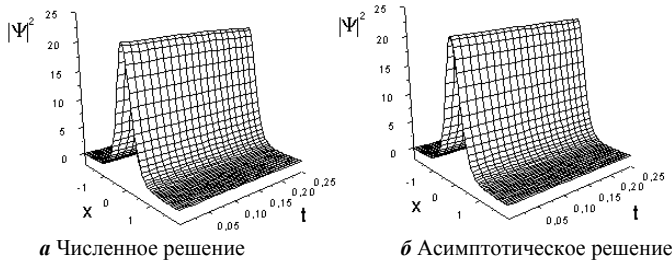


Рис. 2. Потенциал: $v(x) = -10\exp(-x^2)$, $\eta = 4$, $\xi = 10^{-7}$

На *Рис. 2а,3а* приведены результаты для внешнего поля потенциальной ямы $v(x) = -10\exp(-x^2)$. На *Рис. 2б,3б* приведены соответствующие асимптотические решения. На *Рис. 2а* численное решение долго сохраняет локализацию. Оно имеет один пик в соответствии с начальным условием. В этой области асимптотическое решение (*Рис. 2б*) и численное решение соответствуют не только качественно, но и количественно (с точностью несколько процентов).

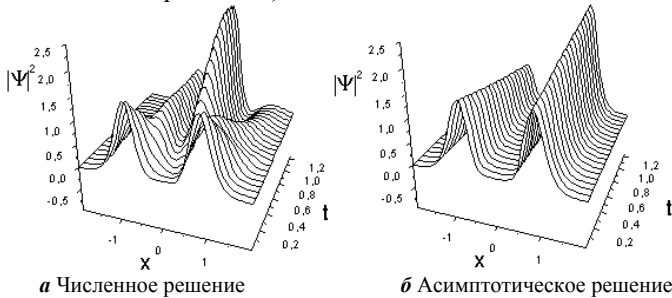


Рис. 3. Потенциал: $v(x) = -10\exp(-x^2)$, $\eta = 2$, $\xi = 0,1$

На *Рис. 3а* рассмотрено численное решение с начальным условием, имеющим два пика (наблюдается эффект “перекачки” плотности поля Ψ («энергии» поля) из одного пика в другой). Результаты численного моделирования качественно согласуются с асимптотическим решением.

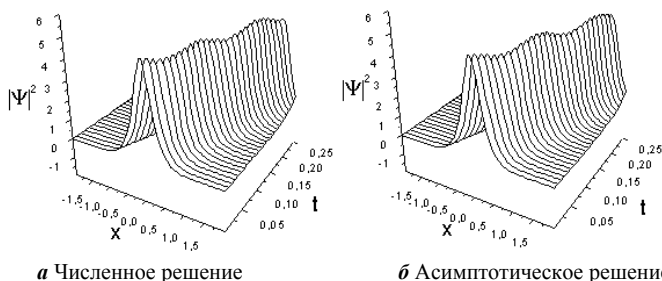


Рис. 4. Потенциал: $v(x) = 1 - \cos(10x)$, $\eta = 1,5$, $\xi = 3$

На *Рис.4а* приведен график численного решения для v -солитона НУШ (3) с внешним полем $v(x) = 1 - \cos(10x)$. На *Рис.4б* показано соответствующее асимптотическое решение. Из их вида следует, что асимптотическое решение согласуется с численным решением на значительном промежутке изменения переменной t . Анализ показывает, что при больших ξ частота модулированных колебаний максимума поля равна половине частоты колебаний потенциала.

Литература.

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. -- М.: Наука, 1980.
2. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems// Rev. Mod. Phys. 1989. V.61. No. 4. P.763-915.
3. Shapovalov A.V. and Trifonov A.Yu. Semiclassical Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation// J. Nonlin. Math. Phys. 1999, V.6, No.2. P.1-12.
4. Belov V.V., Trifonov A.Yu., and Shapovalov A.V. The Trajectory-Coherent Approximation and the System of Moments for the Hartree Type Equation// Int. J. Math. Math. Sci. (USA). 2002. V.32. No.6. P.325-370.