

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ
ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ
(случай переменного коэффициента турбулентного обмена)**

Компаниец Л.А., Якубайлик Т.В.

(Красноярск)

В статье предложено аналитическое решение одной стационарной задачи ветрового движения однородной жидкости в замкнутом водоеме (двумерный в вертикальной плоскости случай). Считается, что дно бассейна неровное, а коэффициент вертикального турбулентного обмена - заранее известная функция пространственных переменных. Приводятся примеры частных решений для конкретных значений коэффициента турбулентного обмена и коэффициентов трения на поверхности и на дне. Эти результаты легко обобщаются на случай двухслойной жидкости. Найденные решения могут быть полезны как тест при анализе качества численных алгоритмов, применяемых для решения задачи определения ветрового движения жидкости в замкнутом водоеме, а также для оценки положения термоклина.

**THE ANALYTICAL SOLUTION OF ONE MODEL OF THE
HOMOGENEOUS LIQUID CURRENT (The case of the non-
constant vertical turbulent exchange coefficient)**

Kompaniets L. A., Yakubailik T. V.

(Krasnoyarsk)

The analytical solution of one stationary model of water motion of the wind current in the homogeneous liquid in the closed reservoir (two-dimensional case in the vertical plane) is proposed in this paper. The study suggests that the bottom of the water basin is not flat and the vertical turbulent exchange coefficient is known function of the space variables. The examples of the particular solutions for the concrete values of the vertical turbulent exchange coefficient and the friction coefficient on the surface and on the bottom are presented.

These results are simply extended to the case of the two – layered liquid. The solutions were found could be useful as a test in the analysis of the quality of the computational algorithms which are applied for solving problem of the wind current in closed basin water bodies and for the evaluation of the thermocline.

Задача определения движения неоднородной и однородной жидкости под действием ветра - сложная задача и чаще всего решается численными методами [1-4]. Аналитические решения, если они существуют, найдены, как правило, для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена [5, 6]. В данной работе для одной модели ветрового движения жидкости [1-2] найдено аналитическое решение для случая переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Рассмотрим модель нестационарного трехмерного ветрового движения в случае однородной по температуре жидкости [1-2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ – компоненты вектора скорости течения, g – ускорение свободного падения; $K_z = K_z(x, y, z, t) > 0$ – коэффициент вертикального турбулентного обмена; $\zeta = \zeta(x, y, t)$ – отклонение поверхности жидкости от равновесного положения, l – параметр Кориолиса. Ось z направлена вертикально вверх.

Введем обозначение $\vec{u} = (u, v)$ и запишем для системы уравнений (1) – (3) граничные условия в случае замкнутого водоема:

$$\text{А) На боковой цилиндрической поверхности } \vec{u}_n = 0. \quad (4)$$

$$\text{Б) На водной поверхности } (z^0 = \zeta) \frac{\partial z^0}{\partial t} = w, \quad (5)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho_0}. \quad (6)$$

$$B) \text{ На дне, при } z = z_0(x, y) = -H(x, y), \quad (7)$$

$$w = u \frac{\partial z_0}{\partial x} + v \frac{\partial z_0}{\partial y}, \quad K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{k}_b |u| u. \quad (8)$$

Здесь $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, где τ_1 и τ_2 – касательные напряжения ветра на водной поверхности по x и y соответственно; u_n – нормальная к береговому контуру составляющая скорости; $\tilde{k}_b = const$ – безразмерный коэффициент придонного касательного напряжения. Отметим, что вариант $\tilde{k}_b = 0$ отвечает условию скольжения без трения, а $\tilde{k}_b = \infty$ – условию прилипания. Эта система уравнений представляет собой приближение Буссинеска, удовлетворяет условию гидростатики и предполагает, что течение является медленным, а дно – гладкое. Интегрируя уравнение (3) с учетом (5) и (7), получаем уравнение для ζ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = 0, \quad \text{где } Q_1 = \int_{z_0}^{z^0} u dz, \quad Q_2 = \int_{z_0}^{z^0} v dz. \quad (9)$$

Кроме того, в начальный момент времени надо задать $u(x, y, z, 0)$, $v(x, y, z, 0)$, $\zeta(x, y, z, 0)$.

Анализ уравнений (1) – (3), (9) и граничных условий (4) – (8) показывает, что уравнения (1), (2), (9) и граничные условия (6) и (8) можно рассматривать независимо от остальных соотношений, поэтому далее будем выписывать только определяющие соотношения и граничные условия для u, v, ζ .

Сделаем ряд упрощающих предположений, позволяющих найти аналитическое решение для горизонтальной составляющей скорости u .

Предположение 1. Движение является двумерным в вертикальной плоскости. *Предположение 2.* Отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения мало и граничное условие (6) можно рассматривать при $z^0 = 0$, [7]. Тогда уравне-

ния (1) и (9) перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$Q_1 = \int_{z_0}^0 u dz, \quad 0 < x < L, \text{ а граничные условия (6) – (8) в виде:}$$

А) На боковых стенках $u|_{x=0,L} = 0$. (12)

Б) На невозмущенной водной поверхности ($z^0 = 0$)

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau}{\rho_0}, \quad (13)$$

В) На дне, при $z = z_0(x) = -H(x)$, $K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = k_b u$, (14)

где k_b – коэффициент придонного касательного напряжения, полученный в результате линеаризации условия (8). В начальный момент времени задаются $u(x, z, 0)$, $\zeta(x, 0)$.

Отметим, что единственность решения начально – краевой задачи для интегро – дифференциальной системы уравнений (10) – (14) при $\beta = 0$, $H(x) = const$, $K_z = const$ в неограниченной области по переменной x показана в работе [7].

Предположение 3. Существует стационарное решение задачи (10) – (14). Тогда получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-H}^0 u(x, z) dz \right) = 0, \quad K_z = K_z(x, z), \quad (16)$$

которая решается в области $0 < x < L$, $-H(x) < z < 0$ со следующими граничными условиями:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x), \quad \beta(x) = \frac{\tau}{\rho_0}, \quad (17)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H(x)} = k_b u, \quad (18)$$

$$u(x) \Big|_{x=0} = u(x) \Big|_{x=L} = 0. \quad (19)$$

В системе уравнений (15), (16) $\zeta = \zeta(x)$ и поэтому первое из уравнений можно переписать в виде $\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \psi_1(x)$.

Проинтегрируем это выражение по z :

$K_z(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} = \psi_1(x)z + \psi_2(x)$. Поделив на $K_z(x, z) > 0$, получаем формулу для определения горизонтальной составляющей скорости

$$u = \int_{-H}^z \frac{\psi_1(x)\eta + \psi_2(x)}{K_z(x, \eta)} d\eta + \psi_3(x). \quad (20)$$

Функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ определим из граничных условий (17), (18) и уравнения (16), подставив в них полученное выражение для u .

Из (17) получаем соотношение

$$\psi_2(x) = \beta(x). \quad (21)$$

Из (18) получаем соответственно

$$-\psi_1(x)H(x) + \psi_2(x) = k_b \psi_3(x), \quad (22)$$

а из уравнения (16) следует, что $\int_{-H}^0 u dz = 0$ или

$$\int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{\psi_1(x)\eta + \psi_2(x)}{K_z(x, \eta)} d\eta + \psi_3(x) = 0.$$

Так как функции ψ_1 и ψ_2 зависят только от x , то последнее уравнение примет вид

$$\psi_1(x) \int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{\eta}{K_z(x, \eta)} d\eta + \psi_2(x) \int_{-H}^0 dz \int_{-H}^z \frac{1}{K_z(x, \eta)} d\eta + \psi_3(x) = 0. \quad (23)$$

Система трех линейных уравнений (21), (22) и (23) с тремя неизвестными ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 имеет решение, если ее определитель не равен нулю, т. е. если $H - k_b K_{\psi_1} \neq 0$, где K_{ψ_1} и K_{ψ_2} – соответствующие определенные интегралы при ψ_1 и ψ_2 в (23). Например, при $k_b = 0$ (на дне условие скольжения без трения), система всегда имеет единственное решение.

Таким образом, формула (20) дает решение системы уравнений (15), (16) с граничными условиями (17) – (18). Поскольку правая часть системы уравнений (21) – (23) пропорциональна $\beta(x)$, то удовлетворить граничному условию (19) можно, положив $\beta(x)|_{x=0,L} = 0$.

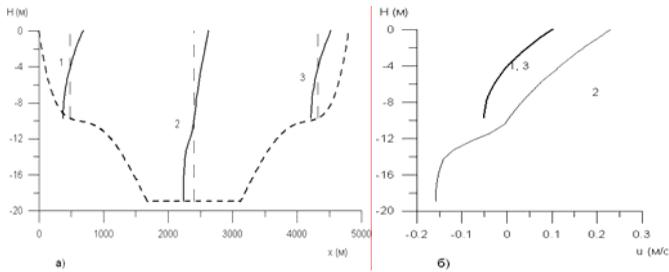


Рис. 1. Распределение скоростей при $k_b = 0$

В частности, при $K_z = const$, получаем

$$u = \frac{\beta(x)}{K_z} \cdot \left(\frac{1 + k_b/2 \cdot H(x)/K_z}{2 + 2 \cdot k_b/3 \cdot H(x)/K_z} \cdot \frac{z^2}{H(x)} + z + \frac{2/3 + k_b/6 \cdot H(x)/K_z}{2 + 2 \cdot k_b/3 \cdot H(x)/K_z} \cdot H(x) \right),$$

и в этом случае при любых значениях k_b распределение скорости по глубине представляет собой полином второй степени. Отметим, что полученное нами решение в случае $K_z(x, z) = const$, $k_b = \infty$ совпадает с решением, указанным в работе [5].

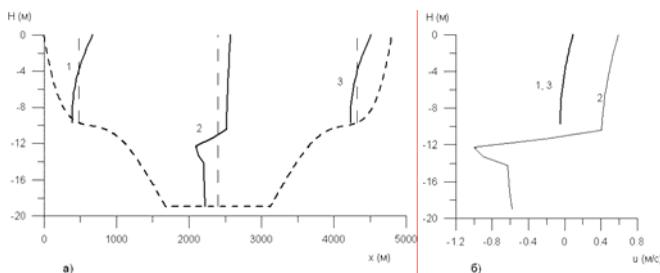


Рис. 2. Распределение скоростей при $k_b = 0.01$

Для модельного бассейна длины 4800 м и глубины 20 м с помощью численного интегрирования были найдены аналитические решения при различных $K_z = K_z(x, z)$ и при $\beta = 0.000624$, что примерно соответствует ветру 2 м/с. Первое из использованных в расчетах $K_z(x, z) = K_z(z)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию от z . Такое K_z часто используется в практических расчетах, например, в [3].

На рис. 1, а) и рис. 2, а) показано качественное поведение скоростей в различных сечениях бассейна для двух значений k_b . Мелким пунктиром обозначен рельеф дна. Крупным пунктиром обозначены сечения бассейна, в которых рассчитывались скорости. На рис. 1, б) и рис. 2, б) представлено количественное поведение скоростей, причем в сечениях 1 и 3 скорости совпадают. Анализ полученных результатов показывает, что в тех областях бассейна, где $K_z = const$, в каждом сечении $x = x_0$ распределение скорости по глубине представляет собой полином второй степени. В то же время, если $K_z = K_z(z)$ (что мы наблюдаем в центральном сечении бассейна), то скорость по глубине меняется более сложным образом.

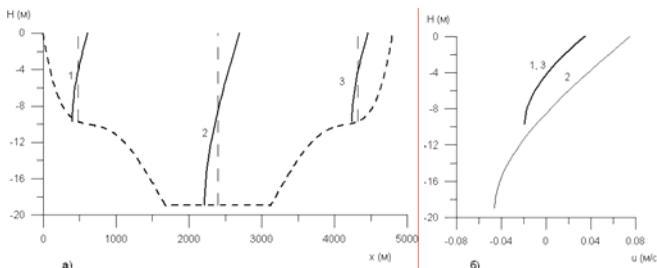


Рис. 3. Распределение скоростей при $K_z(z)$, экспоненциально убывающем по глубине.

Если использовать для определения $K_z(z)$ формулу, в которой коэффициент вертикального турбулентного обмена экспоненциально убывает по глубине [8], [9], то скорости по глубине изменяются, как показано на рис. 3, и величины скорости на поверхности в указанных сечениях количественно совпадают с наблюдаемыми в природе (3-7 см/с при скорости ветра 2 м/с).

Аналогичный алгоритм нахождения аналитических решений применим и для случая двухслойного течения. Как и в случае движения однородной жидкости, будем считать, что дно бассейна неровное, а коэффициент вертикального турбулентного обмена – заранее известная функция пространственных переменных.

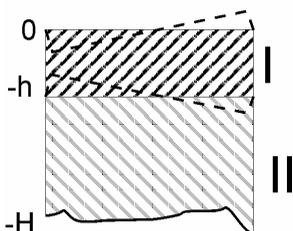


Рис. 4. Двухслойная жидкость

Рассмотрим модель нестационарного ветрового двумерного в вертикальной плоскости движения жидкости в бассейне с неровным дном, которая использовалась в [10] для численного моделирования гидродинамического режима модельного бассейна с ровным дном, а в [11] – для численного моделирования гидродинамических режимов Онежского озера. При этом при-

нимается двухслойная структура температурной стратификации по глубине с границей раздела слоев по термоклину. Термоклин рассматривается как бесконечно тонкий слой, на котором терпят разрыв температура, плотность и коэффициент вертикального турбулентного обмена (рис.4). Тогда уравнения, описывающие в линейном приближении стационарные течения в верхнем и нижнем слое озера, имеют вид:

$$g \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right), \quad (24)$$

$$\int_{-h}^0 u_1 dz = 0, \quad (25)$$

$$g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + g \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right), \quad (26)$$

$$\int_{-H}^{-h} u_2 dz = 0. \quad (27)$$

Граничные условия таковы

$$\rho_1 K_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau(x), \quad \rho_1 K_z^1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-h} = K_z^{1,2} (u_2 - u_1). \quad (28)$$

$$\rho_2 K_z^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=-h} = -K_z^{1,2} (u_2 - u_1), \quad \rho_2 K_z^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u_2, \quad (29)$$

$$u_1 \Big|_{x=0} = u_1 \Big|_{x=L} = u_2 \Big|_{x=0} = u_2 \Big|_{x=L} = 0. \quad (30)$$

Здесь индексы “1” относятся к верхнему, а индексы “2” – к нижнему слою. $K_z^{1,2}$ – коэффициент трения на границе раздела слоев.

Описанным выше способом разделения переменных получим следующие выражения для горизонтальных составляющих скорости для каждого слоя:

$$u_1 = \int_{-h}^z \frac{\phi_1^1(x)\eta + \phi_2^1(x)}{K_z^1} d\eta + \phi_3^1(x), \quad (31)$$

$$u_2 = \int_{-H}^z \frac{\phi_1^2(x)\eta + \phi_2^2(x)}{K_z^2} d\eta + \phi_3^2(x). \quad (32)$$

Подставляя найденные u_1 и u_2 в равенства (24) – (27) и введя обозначения

$$a^1 = \int_{-h}^0 dz \int_{-h}^z \frac{\eta}{K_z^1(x, \eta)} d\eta, \quad b^1 = \int_{-h}^0 dz \int_{-h}^z \frac{1}{K_z^1(x, \eta)} d\eta,$$

$$a^2 = \int_{-H}^{-h} dz \int_{-H}^z \frac{\eta}{K_z^2(x, \eta)} d\eta, \quad b^2 = \int_{-H}^{-h} dz \int_{-H}^z \frac{1}{K_z^2(x, \eta)} d\eta,$$

$$c^1 = \int_{-H}^{-h} \frac{\eta}{K_z^2(x, \eta)} d\eta, \quad c^2 = \int_{-H}^{-h} \frac{1}{K_z^2(x, \eta)} d\eta,$$

получим систему уравнений:

$$a^1(x)\phi_1^1(x) + b^1(x)\phi_2^1(x) + \phi_3^1(x) = 0, \quad (33)$$

$$a^2(x)\phi_1^2(x) + b^2(x)\phi_2^2(x) + \phi_3^2(x) = 0, \quad (34)$$

$$\rho_1\phi_2^1(x) = \tau(x), \quad (35)$$

$$\rho_1(\phi_1^1(x)(-h) + \phi_2^1(x)) = K_z^{1,2}(-\phi_3^1(x) + c^1(x)\phi_1^2(x) + c^2\phi_2^2(x) + \phi_3^2(x)), \quad (36)$$

$$\rho_2(\phi_1^2(x)(-h) + \phi_2^2(x)) = -K_z^{1,2}(-\phi_3^1(x) + c^1(x)\phi_1^2(x) + c^2\phi_2^2(x) + \phi_3^2(x)), \quad (37)$$

$$\rho_2(-\phi_1^2(x)H(x) + \phi_2^2(x)) = k_b\phi_3^2(x). \quad (38)$$

Система уравнений (33) – (38) представляет собой линейную систему шести уравнений относительно шести неизвестных и позволяет найти решение уравнений (24) – (27), которое удовлетворяет граничным условиям (28) – (29), но не удовлетворяет граничным условиям (30). Поскольку правая часть системы уравнений (33) – (38) пропорциональна $\tau(x)$, то, предположив, что $\tau(x)$ обращается в ноль при $x=0$ и $x=l$, мы получим точное

решение рассматриваемой задачи. Отметим, что в работе [12] рассматривалось аналитическое решение для двухслойного течения в бассейне с постоянным дном.

Как правило, считается, что $K_z^1 = const$, $K_z^2 = const$. Рассмотрим случай $K_z^{1,2} = 0$ (он рассматривается в статье [10] как один из возможных вариантов задания трения между двумя слоями жидкости) и $k_b = 0$. Тогда, как мы знаем, распределение скорости по глубине в слое I происходит по квадратичному закону $u_1(x, z) = \frac{\tau(x)}{\rho_1 K_z^1} \left(\frac{z^2}{2h} + z + \frac{1}{3}h \right)$.

В слое II для определения скорости надо проинтегрировать соотношение $\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = \phi_1^2(x)$, что также приводит к тому, что в каждом сечении распределение скорости по глубине происходит по квадратичному закону $u_2(x, z) = \frac{d_1(x)}{2} z^2 + d_2(x)z + d_3$.

При этом должны выполняться условия $K_z^2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$,

$\rho_2 K_z^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u_2$, $\int_{-H}^{-h} u_2 dz = 0$. Или $\rho_2 K_z^2 (d_1(-h) + d_2) = 0$ и

$\rho_2 K_z^2 d_1((-H) + d_2) = 0$. Так как $h \neq H$, то $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, что соответствует течению только в области I даже для неровного дна. Отметим также, что в этом случае функции $\eta^1(x)$ и

$\eta^2(x)$ связаны соотношением $(1 - \frac{\rho^1}{\rho^2}) \frac{\partial \eta^2}{\partial x} = -\frac{\rho^1}{\rho^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x}$ или

$$\frac{\left| \frac{\partial \eta^2}{\partial x} \right|}{\left| \frac{\partial \eta^1}{\partial x} \right|} = \frac{\left| \frac{\rho^1}{\rho^2} \right|}{\left| 1 - \frac{\rho^1}{\rho^2} \right|}, \text{ которое не зависит от силы ветра и объясняет}$$

эффект возможного сильного отклонения термоклина от равновесного положения $\eta^2(x) = -h$ при относительно небольшом

отклонении свободной поверхности $\eta^1(x)$ от невозмущенной поверхности, как это отмечалось в работе[10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ и CRDF, грант №REC-002.

Литература.

1. Квон В.И. Гидротермический расчет водоемов - охладителей. Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1979, №5, стр. 129-137.
2. Волкова Г.Б., Квон В.И., Филатова Т.Н. Численное моделирование ветровых течений в Чудском озере. Водные ресурсы. №3, 1981 г., стр. 91-99.
3. Wang Y., Hutter K. Methods of substructuring in lake circulation dynamics. Advances in Water Resources. 23 (2000) pp. 399-425.
4. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений. Москва, издательство «Наука», 1978, 128 с.
5. Филатов Н.Н. Динамика озер. Ленинград: Гидрометеиздат, 1983, 166 с.
6. Wang Y., Hutter K., Bauerle E. Barotropic response in a lake to wind - forcing. Annales Geophysicae, 2001, 19, pp. 367-388.
7. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск. Издательство СО РАН, 2000, 420 с.
8. Witten A., Thomas J. Steady wind-driven currents in large lake with depth-dependent eddy viscosity. J. of Phys. Ocean., 1976, v. 6, №3, pp. 85-92.
9. Belolipetsky V. M., Genova S. N. Investigation of Hydrothermal and Ice Regimes in Hydropower Station Bays. IJCFD, 1998, Vol. 10, pp. 151 - 158.
10. Добровольская З.Н., Епихов Г.П., Корявов П.П., Моисеев Н.Н. Математические модели для расчета динамики и качества сложных водных систем. Водные ресурсы, 3, 1981, стр. 33-51.