ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ. ОБОБЩЕНИЕ И СИСТЕМАТИЗАЦИЯ

Трубников С.В.

(Брянск)

Назрела потребность систематизации и обобщения имеющихся разных подходов к изложению теории погрешностей. Результатом такого обобщения и систематизации стал новый курс теории погрешностей. Этот курс в сжатом изложении и предлагается вниманию читателей.

THE THEORY OF ERRORS. GENERALIZATION AND ORDERING

Trubnikov S.V.

(Bryansk)

Has appeared need of ordering and generalization of the available different approaches to a statement of the theory of errors. This generalization and ordering resulted in a new course of the theory of errors. This course in the compressed statement also is offered to attention of the readers.

Введение

Основные понятия теории погрешностей пронизывают всю вычислительную и прикладную математику. Вместе с тем, анализ многих вузовских учебников по вычислительной математике показал, что до сих пор не устоялись определения даже самых основных понятий этой теории [1-8]. Ни в одной из книг нет определения точного и приближенного значений. Нигде нет более или менее ясной увязки понятий теории погрешностей вычислений с понятиями теории погрешностей измерений. В обозначениях также наблюдается большое разнообразие. Таким образом, назрела необходимость систематического изложения теории погрешностей, обобщающего имеющийся опыт, а также обсуждения определений основных понятий и системы обозначений.

На кафедре информатики и прикладной математики Брянского государственного университета был разработан учебный курс по теории погрешностей, в котором был обобщен и систематизирован имеющийся опыт, отобраны наиболее подходящие определения основных понятий, а также введены новые фундаментальные понятия. Этот курс в сжатом изложении предлагается для обсуждения в качестве обобщения имеющихся на данный момент разных подходов к изложению теории погрешностей.

Основные понятия и обозначения теории погрешности приближенных значений числовых величин.

Пусть имеется некоторая числовая величина. Числовое значение, которое ей присвоено, мы назовем *точным значением этой величины*. Обозначать точные значения величин будем, приписывая к их именам нижний индекс *e*. Например, точное значение величины *x* будем обозначать x_e.

Под *приближенным значением числовой величины* понимается любое число, которое мы выбираем и будем использовать вместо точного значения. Обозначать приближенные значения величин будем, приписывая к их именам нижний индекс *a*. Например, приближенное значение величины *x* будем обозначать x_a.

Абсолютной погрешностью приближенного значения x_a будем называть $|x_e - x_a|$.

Относительной погрешностью приближенного значения x_a будем называть $\dfrac{|x_e - x_a|}{|x_a|}$, $(x_a \neq 0)$.

О точном значении x_e должна быть какая-то информация. Любая такая информация сводится к определению числового множества, которому должно принадлежать точное значение x_e. Это множество будем называть *множеством принадлежности для точного значения величины x*. Множество принадлежности для точного значения числовой величины будем обозначать буквой E, приписывая к ней в качестве нижнего индекса имя величины. Так, множество принадлежности для точного значения x_e величины x будет обозначено E_x. Таким образом, любую информацию о точном значении x_e мы будем сводить к отношению вида:

$$x_e \in E_x \subseteq \mathbf{R}. \tag{1}$$

В дальнейшем будем считать, что *множество принадлежности E_x является ограниченным*.

Оценкой (верхней границей) абсолютной погрешности приближенного значения x_a будем называть любую из верхних границ функции $|x - x_a|$ по множеству принадлежности E_x.

Оценкой (верхней границей) относительной погрешности приближенного значения x_a будем называть любую из верхних границ функции $\dfrac{|x - x_a|}{|x_a|}$ по множеству принадлежности E_x.

Оценки абсолютной (относительной) погрешности приближенного значения x_a будем обозначать $\Delta(x_a)$ или коротко Δx_a ($\delta(x_a)$ или коротко δx_a). Очевидно, что абсолютная и относительная погрешности x_a не превышают любых своих оценок:

$$|x_e - x_a| \le \Delta x_a, \quad \frac{|x_e - x_a|}{|x_a|} \le \delta x_a \tag{2}$$

Между множествами оценок абсолютной и относительной погрешности x_a можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$$\delta x_a = \frac{\Delta x_a}{|x_a|}. \tag{3}$$

Наилучшей из оценок абсолютной (относительной) погрешности x_a является наименьшая оценок абсолютной (относительной) погрешности. Назовем её *предельной абсолютной (относительной) погрешностью* x_a. Таким образом, *предельная* *абсолютная (относительная) погрешность* x_a определяется следующим образом:

$$\Delta x_a = \sup_{x \in E_x} |x - x_a| \quad \left(\delta x_a = \sup_{x \in E_x} \frac{|x - x_a|}{|x_a|} = \frac{\Delta x_a}{|x_a|} \right). \tag{4}$$

Верхней (нижней) границей величины x назовем любую из верхних (нижних) границ множества принадлежности E_x. Обозначать границы числовых величин будем символами ВГ (НГ), приписывая в качестве нижнего индекса имя величины. Так, верхняя (нижняя) граница величины x обозначается ВГ_x (НГ_x). Наилучшей из верхних (нижних) границ x является наименьшая (наибольшая) из них. Будем эти границы называть *точными*. Таким образом, *точная верхняя (нижняя) граница величины x* определяется по формуле:

$$\text{ВГ}_x = \sup E_x \quad (\text{НГ}_x = \inf E_x) \tag{5}$$

Очевидно, что

$$x_e \in E_x \subseteq [\text{НГ}_x, \text{ВГ}_\text{x}]. \tag{6}$$

Связь между значениями x_a *и* Δx_a *с одной стороны, и соответствующими значениями границ* ВГ_x *и* НГ_x *с другой стороны*, устанавливают следующие два утверждения.

Пусть известны x_a, Δx_a и больше о точном значении x_e ничего не известно. Из (2) следует, что $x_e \in [x_a - \Delta x_a, x_a + \Delta x_a]$. Таким образом, $E_x = [x_a - \Delta x_a, x_a + \Delta x_a]$,

$$\text{НГ}_x = x_a - \Delta x_a, \ \text{ВГ}_x = x_a + \Delta x_a. \tag{7}$$

2. Пусть известны ВГ_x, НГ_x и больше о точном значении x_e ничего не известно. Тогда из (6) получим, что множество принадлежности $E_x = [\text{НГ}_x, \text{ВГ}_x]$. Выберем

$$x_a = \frac{\text{ВГ}_x + \text{НГ}_x}{2}. \tag{8}$$

При таком выборе приближенного значения x_a предельная абсолютная погрешность его будет минимальной и равной

$$\Delta x_a = \frac{\text{ВГ}_x - \text{НГ}_x}{2}. \qquad (9)$$

Методы оценки погрешности приближенных значений функций нескольких переменных

Рассмотрим следующую задачу. Величина *u* связана с величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функциональным отношением $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точные значения аргументов $x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne}$ не известны, но о них имеется информация, позволяющая определить множества принадлежности E_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если, например, известны приближенные значения аргументов $x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}$ и оценки их абсолютных погрешностей $\Delta x_{1a}, \Delta x_{2a}, \ldots, \Delta x_{na}$, то, согласно (7), $E_{x_i} = [x_{ia} - \Delta x_{ia}, x_{ia} + \Delta x_{ia}]$. Точное значение величины *u*, равное $u_e = f(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$, также неизвестно. Требуется выбрать приближенное значение u_a величины *u* и найти оценку абсолютной погрешности этого значения Δu_a. Для этого можно воспользоваться несколькими методами.

1. *Прямое вычисление предельной абсолютной погрешности приближенного значения функции многих переменных.*

Будем считать, что приближенное значение u_a величины *u* уже выбрано. Чаще всего его выбирают следующим образом: $u_a = f(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na})$. Множество принадлежности точки $(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne})$ представляет собой прямое декартово произведение $E = E_{x_1} \times E_{x_2} \times \ldots \times E_{x_n}$:

$$(x_{1e}, x_{2e}, \ldots, x_{ne}) \in E, \qquad (10)$$

а множество принадлежности точного значения величины *u* представляет собой образ множества *E* при отображении *f*:

$$E_u = f(E) = f(E_{x_1} \times E_{x_2} \times \ldots \times E_{x_n}). \qquad (11)$$

Из (4) и (11) следует, что предельная абсолютная погрешность u_a равна:

$$\Delta u_a = \sup_{u\in E_u}\left|u-u_a\right| \equiv \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E}\left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-u_a\right| \quad (12)$$

Оценка (12) является *точной*. Кроме того, она может применяться при любом выборе u_a. Но использование её часто сопряжено с техническими трудностями.

2. *Обобщенный метод границ*

Из (5) следует:

$$\text{НГ}_u = \inf E_u = \inf_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad (13)$$

$$\text{ВГ}_u = \sup E_u = \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in E} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad (14)$$

После вычисления границ величины u можно наилучшим образом выбрать u_a по формуле (8):

$$u_a = \frac{\text{ВГ}_u + \text{НГ}_u}{2}\,. \quad (15)$$

При таком выборе приближенного значения u_a его предельная абсолютная погрешность будет наименьшей и равной (см. формулу (9)):

$$\Delta u_a = \frac{\text{ВГ}_u - \text{НГ}_u}{2}\,. \quad (16)$$

Оценка (16) также является *точной* и соответствует наилучшему выбору приближенного значения u_a. Наиболее сложным моментом здесь является вычисление границ по формулам (13) и (14). Для преодоления этих трудностей можно использовать два пути.

Первый путь – использование метода, изложенного в работе [9]. Пусть известны приближенные значения аргументов $x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}$ и оценки их абсолютных погрешностей $\Delta x_{1a}, \Delta x_{2a}, \ldots, \Delta x_{na}$, тогда $E_{x_i} = [x_{ia} - \Delta x_{ia}, x_{ia} + \Delta x_{ia}]$, а множество принадлежности $E = E_{x_1} \times E_{x_2} \times \ldots \times E_{x_n}$ представляет собой n-мерный прямоугольник. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является *монотонной по каждому из своих аргументов в* E и характер монотонности по каждому аргументу известен, то есть для любого аргумента x_i и для любой точки $(x_1', x_2', \ldots, x_n') \in E$ функция одной переменной $\varphi(x_i) = f(x_1', \ldots, x_{i-1}', x_i, x_{i+1}', \ldots, x_n')$ либо не убывает, либо не возрастает на $[x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a}, x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a}]$. Тогда функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет иметь наименьшее и наибольшее значение на *E* и они будут достигаться в вершинах *E*. Координаты точки минимума $x_{i\min}$ и точки максимума $x_{i\max}$ и границы *u* определяются по очевидным формулам:

$$x_{i\min} = \begin{cases} x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a} \ \text{если}\ \varphi(x_i)\ \text{не убывает на}\ [x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a}, x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a}], \\ x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a} \ \text{если}\ \varphi(x_i)\ \text{не возрастает на}\ [x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a}, x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a}], \end{cases} \tag{17}$$

$$x_{i\max} = \begin{cases} x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a} \ \text{если}\ \varphi(x_i)\ \text{не убывает на}\ [x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a}, x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a}], \\ x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a} \ \text{если}\ \varphi(x_i)\ \text{не возрастает на}\ [x_{i\,a} - \Delta x_{i\,a}, x_{i\,a} + \Delta x_{i\,a}]. \end{cases} \tag{18}$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

$$\text{НГ}_u = f(x_{1\min}, x_{2\min}, \ldots, x_{n\min}), \qquad \text{ВГ}_u = f(x_{1\max}, x_{2\max}, \ldots, x_{n\max}). \tag{19}$$

Условия монотонности функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по каждому из аргументов в *E* выполняются в подавляющем большинстве случаев, поскольку размеры прямоугольника *E*, как правило, малы. Если же эти условия не выполняются на всем прямоугольнике *E*, то часто его можно разбить на более мелкие прямоугольники, на которых условия монотонности будут выполняться.

Второй путь состоит в том, чтобы вычисление границ *u* производить поэтапно.

3. *Стандартный метод границ. Совместное использование стандартного и обобщенного метода границ.*

Используя свойства неравенств несложно показать справедливость следующих формул стандартного (пооперационного) метода границ:

$$\text{НГ}_{x+y} = \text{НГ}_x + \text{НГ}_y, \ \text{ВГ}_{x+y} = \text{ВГ}_x + \text{ВГ}_y. \tag{20}$$

$$НГ_{x-y} = НГ_x \text{ - } ВГ_y\,,\ ВГ_{x-y} = ВГ_x \text{ - } НГ_y\,. \tag{21}$$

$$НГ_{x \cdot y} = НГ_x \cdot НГ_y\,,\ ВГ_{x \cdot y} = ВГ_x \cdot ВГ_y \quad \text{при} \quad НГ_x \ge 0 \quad \text{и} \quad НГ_y \ge 0\,. \tag{22}$$

$$НГ_{x / y} = НГ_x / ВВ_y\,,\ ВГ_{x / y} = ВГ_x / НН_y \quad \text{при} \quad НГ_x \ge 0 \quad \text{и} \quad НГ_y > 0\,. \tag{23}$$

$$НГ_{f(x)} = \inf_{x \in [НГ_x, ВГ_x]} f(x),\ ВГ_{f(x)} = \sup_{x \in [НГ_x, ВГ_x]} f(x)\,. \tag{24}$$

Во всех случаях, когда выполняются условия применимости формул (22) и (23) можно вычислять границы u с помощью формул стандартного метода границ. В противном случае, для вычисления границ произведения и частного можно использовать обобщенный метод границ. Таким образом, обобщенный метод границ, в совокупности со стандартным, позволяет достаточно быстро и просто решить поставленную задачу во всех случаях. Кроме того, используя метод, границ мы получаем оптимальное приближенное значение u_a и точное значение его предельной абсолютной погрешности.

4. *Линейная асимптотическая оценка абсолютной погрешности приближенного значения функции многих переменных*

Пусть известны приближенные значения аргументов $x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}$ и оценки их абсолютных погрешностей $\Delta x_{1a}, \Delta x_{2a}, \ldots, \Delta x_{na}$. Тогда множества принадлежности точных значений аргументов представляют собой отрезки $E_{x_i} = \left[x_{ia} - \Delta x_{ia}, x_{ia} - \Delta x_{ia}\right]$, а множество принадлежности $E = E_{x_1} \times E_{x_2} \times \ldots \times E_{x_n}$ - n-мерный прямоугольник. Приближенное значение u_a величины u выбирается следующим образом: $u_a = f\left(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}\right)$.

Можно показать, что если функция $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ дифференцируема на множестве E, а её частные производные мало меняются на E, и все одновременно не обращаются в 0 в точке $\left(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}\right)$, то *для выбранного приближенного значения* будет справедлива и достаточно точна следующая *приближенная асимптотическая* оценка:

$$\Delta u_a \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f\left(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}\right)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_{ia} \,. \tag{25}$$

Проверка всех условий корректного применения этой оценки зачастую сложнее, чем применение метода границ.

Вероятные оценки погрешности числовой величины. Метод статистического усреднения

В метрологии для оценки погрешностей результатов измерений, используется аппарат теории вероятности и математической статистики. Информация о точном значении измеряемой числовой величины часто не позволяет построить ограниченное множество принадлежности точного значения. Если же множество принадлежности E_x не ограничено, то при любом выборе приближенного значения x_a мы не сможем получить конечной оценки его погрешности Δx_a. Но может оказаться, что точное значение величины должно принадлежать некоторому ограниченному и достаточно узкому числовому множеству с некоторой, достаточно большой, вероятностью.

Пусть имеется некоторая числовая величина x с точным значением x_e. О точном значении имеется информация, которая для приемлемого значения $\beta \in (0,1)$ позволяет построить *ограниченное* числовое множество E_x^β такое, что вероятность принадлежности точного значения этому множеству равна β:

$$P\left\{x_e \in E_x^\beta \right\} = \beta \,. \tag{26}$$

Это множество мы будем называть *доверительным множеством принадлежности точного значения величины x с вероятностью* β.

Оценкой (верхней границей) абсолютной *погрешности приближенного значения* x_a *с вероятностью* β будем называть любую из верхних границ функции $|x - x_a|$ по доверительному множеству принадлежности E_x^β.

Оценкой (верхней границей) относительной погрешности приближенного значения x_a *с вероятностью* β будем называть любую из верхних границ функции $\dfrac{|x-x_a|}{|x_a|}$ по доверительному множеству принадлежности E_x^{β}. Вероятные оценки абсолютной (относительной) погрешности приближенного значения x_a будем обозначать $\Delta_{\beta}(x_a)$ ($\delta_{\beta}(x_a)$). Очевидно, что абсолютная и относительная погрешности x_a не превышают своих вероятных оценок с вероятностью β. Между множествами вероятных оценок абсолютной и относительной погрешности x_a можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$$\delta_{\beta}(x_a)=\frac{\Delta_{\beta}(x_a)}{|x_a|}. \tag{27}$$

Наименьшую из оценок абсолютной (относительной) погрешности x_a с вероятностью β назовем *предельной абсолютной (относительной) погрешностью* x_a *с вероятностью* β. Таким образом, *предельная абсолютная (относительная) погрешность* x_a *с вероятностью* β определяется следующим образом:

$$\Delta_{\beta}(x_a)=\sup_{x\in E_x^{\beta}}|x-x_a| \quad \left(\delta_{\beta}(x_a)=\sup_{x\in E_x^{\beta}}\frac{|x-x_a|}{|x_a|}=\frac{\Delta_{\beta}(x_a)}{|x_a|}\right) \tag{28}$$

Далее можно по аналогии ввести понятия *верхней* $\text{ВГ}_{x\beta}$ *и нижней* $\text{НГ}_{x\beta}$ *границ x с вероятностью* β, установить их связь с x_a и $\Delta_{\beta}(x_a)$. *На вероятные оценки, очевидно, распространяются все методы, описанные выше.* Но наиболее сложным является вопрос построения доверительного множества принадлежности точного значения. Рассмотрим его на примере метода статистического усреднения.

Метод статистического усреднения.

Пусть значение некоторой числовой величины x получают путем измерения и пусть при измерении отсутствует систематическая составляющая погрешности, но присутствует случайная составляющая. Это означает, что повторяя измерения мы будем получать вообще говоря разные приближенные значения величины. Эти значения (результаты измерений) представляют собой значения некоторой случайной величины ξ. *Отсутствие систематической составляющей в погрешности измерений означает, что математическое ожидание этой случайной величины* $M\xi$ *совпадает с точным значением* x_e *измеряемой детерминированной величины* x:

$$M\xi = x_e . \tag{29}$$

Будем считать также, что *случайная величина* ξ *имеет нормальное распределение*. Проводятся n независимых измерений величины x и получаются n приближенных результатов измерения: $x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}$. В качестве итогового приближенного значения измеряемой величины x_a выбирается среднее значение результатов измерений $\bar{x}$. Кроме того, вычисляется выборочное среднеквадратическое отклонение S и строится доверительный интервал для математического ожидания x_e:

$\left(\bar{x} - t_{n-1\beta} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{n-1\beta} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$, где $t_{n-1\beta}$ – коэффициенты Стьюдента. Этот интервал, очевидно, представляет собой множество E_x^β, а вероятная оценка погрешности

$$\Delta_\beta(x_a) = \sup_{x \in E_x^\beta} |x - x_a| = \sup_{x \in E_x^\beta} |x - \bar{x}| = t_{n-1\beta} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} . \tag{30}$$

Большая часть понятий теории погрешностей элементарно распространяются на объекты произвольных метрических пространств. Это обобщение является неотъемлемой частью теории погрешностей. Оно связано с такими фундаментальными понятиями, как аппроксимация, устойчивость, корректность и обусловленность, но ограниченный объём статьи не позволил коснуться этого вопроса.

Литература.

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, том I. - М.: Наука, 1976.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
4. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Техника вычислений и алгоритмизация. – М.: Просвещение, 1987.
5. Иванова Т.П., Пухова Г.В. Вычислительная математика и программирование. – М.: Просвещение, 1978.
6. Пулькин С.П., Никольская Л.Н., ДьячковА.С. Вычислительная математика. – М.: Просвещение, 1980.
7. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. – М: Физматлит, 1994.
8. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: "Высшая школа", 2000.
9. Трубников С.В. Обобщение метода границ применительно к определению предельной абсолютной погрешности вычисления функции многих переменных. – В кн.: Сборник научно-методических статей по математике. Вып. 12. – М.: Высшая школа, 1985.