ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ БИОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ СЕРДЦА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ ВО ВХОДНЫХ ПРЕДИКТОРАХ

Пешехонов А.Н., Кацюба О.А.

(Самара)

В статье рассматривается проблема конструирования численного алгоритма ре-шения задачи идентификации параметров стохастического линейного разностного уравнения на основе нелинейного метода наименьших квадратов.

NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF PROBLEM STOCHASTIC LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS PARAMETERS IDENTIFICATION IN CASE HANDICAPES ARE AVAILABLE IN INPUT PREDICTORS

Pechekhonov A.N., Kacuba O.A.

(Samara)

The article is touching upon the problem of numerical algorithm designing for solution of the problem of stochastic linear difference equation parameters identification on the basis of non-linear method of least squares.

Модели эквивалентного электрического генератора сердца (ЭЭГС) широко используются в исследованиях его электрического поля, описывая состояние сердца через его эквивалентные электрические параметры относительно выбранного центра системы координат, предназначенные для решения обратной электродинамической задачи.

В литературе представлено множество моделей ЭЭГС: модель для возбудимой клетки произвольной формы, модель для цилиндрической возбудимой клетки, модель для поврежденной клетки, модель для изотропного однородного миокарда, модель для элементарного биоэлектрического генератора анизотропного однородного миокарда и т.д.

К недостаткам перечисленных выше моделей следует отнести, прежде всего, их слабую или недостаточно аргументированную связь с реальными физическими процессами в миокарде, отсутствие возможности объяснить происхождение отдельных зубцов электрокардиографических кривых. Попытки использовать модели ЭЭГС мультипольного типа приводят к значительному усложнению модели. Уменьшение же порядка мультиполя повышает погрешности в результатах решения задачи и снижает практическую ценность модели.

Необходима другая модель, в которой помимо перечисленного имелась бы возможность судить о будущем развитии объекта, включающего данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы).

Имеется информация о математической структуре пространственно-временной модели распределения биопотенциалов [1], которая по существу является базой для создания диагностических алгоритмов в кардиологии в форме стохастической линейной нестационарной модели на основе базисных сферических функций. Решив «обратную задачу» кардиологии с помощью этой пространственно-временной модели мы как бы автоматически сможем решать определенные задачи с помощью других моделей, которые как правило сводятся к оцениванию параметров модели. Однако, в виду трудностей оценивания параметров этой модели она не нашла практического применения, чему и посвящено дальнейшее исследование статьи.

Итак, в качестве пространственной модели для любого сечения времени используется:

$$\varphi_i(\rho) = \sum_n C_n(\rho_i) G_n(i) + e_i, \text{ где}$$

$\{e_i\}$ – последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией,

φ – пространственный потенциал,

ρ – сферические координаты,

$C_n(\rho)$ – сферические функции,

G – вектор неизвестных параметров.

В связи с линейностью модели возможно применение стандартного метода наименьших квадратов (оценки состоятельные, несмещенные и с достаточно высокой эффективностью). Изменение этих параметров во времени можно описать многомерным процессом авторегрессии, особенностью которого является наличие помех наблюдений во входных предикторах, причем эти помехи будут представлять собой последовательность зависимых случайных величин и поэтому применение стандартного метода наименьших квадратов невозможно. Предлагается следующий метод: пусть процесс эволюции коэффициентов пространственной модели $G_n(i)$ описывается следующим стохастическим разностным уравнением порядка r:

$$z_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} x_{i-m} + \xi_1(i), y_i = z_i + \xi_2(i)$$

В [2] предложены оценки $\hat{b}(N)$ и $\hat{a}(N)$ неизвестных параметров b_0 и a_0 из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщенных ошибок с весом $\omega(b)$, то есть из:

$$\min_{\left(\frac{b}{a}\right)\in \tilde{B}CR_{r+r_1+1}} \omega^{-1}(b) U_N^1(b,a), \quad \text{где}$$

$$U_N^1(b,a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - y_r^T(i)b - x_{r_1}^T(i)a)^2 , \tag{1}$$

$$\omega(b) = 1 + \gamma + b^T b ,$$

$$y_r(i) = (y_{i-1}, \ldots, y_{i-r})^T \in R_r , \quad x_{r_1}(i) = (x_i, \ldots, x_{i-r_1})^T \in R_{r_1+1} ,$$

$$\gamma = \sigma_1^2 / \sigma_2^2 ;$$

Эти оценки существуют, единственны и являются сильно состоятельными. В частном случае при отсутствии входных сигналов имеет место процесс авторегрессии конечного порядка.

В общем случае вычисление оценок (1) является задачей минимизации отношения двух квадратичных форм и применения прямых методов (градиентного, метода Ньютона и т.д.) для определения глобального минимума сопряжено с известными трудностями, особенно при идентификации многомерных динамических систем.

Для получения конструктивного метода вычисления оценок из критерия (1), рассмотрим функции:

$$V_N(b,a,\theta) = U_N^1(b,a) - \hat{\theta}\,\omega(b),\ \hat{\theta} \in R_1,$$

$$V_N(\hat{\theta}) = \min_{\left(\frac{b}{a}\right) \in \tilde{B}CR_{r+r_1+1}} V_N(b,a,\hat{\theta}).$$

Тогда

$$U_N^1(b,a) = (Y - A_Y b - xa,\ Y - A_Y b - xa) \text{ и}$$

$$V_N(b,a,\hat{\theta}) = Y^T Y - (1+\gamma)\hat{\theta} + \left(\frac{b}{a}\right)^T \left(\begin{array}{c|c} A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r & A_Y^T x \\ \hline x^T A_Y & x^T x \end{array}\right) \left(\frac{b}{a}\right) - 2\left(\frac{A_Y^T Y}{x^T Y}\right)^T \left(\frac{b}{a}\right) =$$

$$= Y^T Y - (1+\gamma)\hat{\theta} + b^T (A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r) b + 2b^T (A_Y^T x) a + a^T (x^T x) a - 2(Y^T A_Y) b - 2(Y^T x) a.$$

где $Y = (y_1 \ldots y_N)^T$, $A_Y = \begin{vmatrix} y_0 & \cdots & y_{1-r} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{N-1} & \cdots & y_{N-r} \end{vmatrix}$, $x = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{1-r_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_N & \cdots & x_{N-r_1} \end{vmatrix}$.

Дифференцируя $V_N(b,a,\hat{\theta})$ по b,a и приравнивая производные к нулю, получаем:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r & A_Y^T x \\ \hline x^T A_Y & x^T x \end{array}\right) \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{A_Y^T Y}{x^T Y}\right). \tag{2}$$

Тогда из (2) находим

$$\left(\frac{\hat{b}(N,\hat{\theta})}{\hat{a}(N,\hat{\theta})}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r & A_Y^T x \\ \hline x^T A_Y & x^T x \end{array}\right)^{-1} \left(\frac{A_Y^T Y}{x_T Y}\right)$$

и, следовательно,

$$V_N(\theta) = Y^T Y - (1+\gamma)\hat{\theta} - \begin{pmatrix} \dfrac{A_Y^T Y}{x^T Y} \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r}{x^T A_Y} & \dfrac{A_Y^T x}{x^T x} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dfrac{A_Y^T Y}{x^T Y} \end{pmatrix}.$$

Лемма. Для функции $V_N(\hat{\theta})$, связанной с задачей (1), справедливы следующие утверждения:

1). все корни уравнения

$$V_N(\hat{\theta}) = 0 \tag{3}$$

(если они существуют) неотрицательны;

2). уравнение (3) на полусегменте $[0, \wedge_{\min}(N))$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}_1(N)$, если $\det(x^T x) \neq 0$, где $\wedge_{\min}(N)$ – наименьшее собственное число матрицы $\left[(A_Y^T A_Y) - (A_Y^T x)(x^T x)^{-1}(x^T A_Y)\right]$

3). невырожденность матрицы $x^T x$ и существование корня на полусегменте $[0, \wedge_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи (1).

При этом

$$\min_{\left(\frac{b}{a}\right) \in \tilde{B}CR_{r+\eta+1}} \omega^{-1}(b) U_N^1(b,a) = \frac{U_N^1(\hat{b}(N), \hat{a}(N))}{\omega(\hat{b}(N))},$$

где

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \hline \hat{a}(N) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{A_Y^T A_Y - \hat{\theta}_1(N) I_r}{x^T A_Y} & \dfrac{A_Y^T x}{x^T x} \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{A_Y^T Y}{x^T Y} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на разложении определителя блочной матрицы, то есть, если $\det(x^T x) \neq 0$, то $\det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r}{x^T A_Y} & \dfrac{A_Y^T x}{x^T x} \end{array} \right) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\det\left\{\left[(A_Y^T A_Y)-(A_Y^T x)(x^T x)^{-1}(x^T A_Y)\right]-\overset{\wedge}{\theta} I_r\right\}=0$$

Заметим, что функция $V_N(\theta)$ на полусегменте $[0,\wedge_{\min}(N))$ непрерывна, к тому же $\wedge_{\min}(N)\geq 0$ как собственное число неотрицательного определения матрицы $(A_Y^T A_Y)-(A_Y^T x)(x^T x)^{-1}(x^T A_Y))$. Далее,

$$\dot{V}_N(\theta)=-(1+\gamma+b^T(\hat{\theta})b(\hat{\theta}))\leq -1,\quad \forall\hat{\theta}\in(-\infty,\wedge_{\min}(N))\ .$$

Тогда на интервале $(-\infty,\wedge_{\min}(N))$ $V_N(\overset{\wedge}{\theta})$ имеет не более одного корня, если он существует; с другой стороны, $V_N(\overset{\wedge}{\theta})\geq 0$ (матрица $I_N-\left(\dfrac{A_Y^T}{x^T}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{A_Y^T A_Y}{x^T A_Y} & \dfrac{A_Y^T x}{x^T x}\end{array}\right)^{-1}\left(\dfrac{A_Y^T}{x^T}\right)$ - идемпотентная) и, следовательно, $V_N(\overset{\wedge}{\theta})>0$, $\forall\overset{\wedge}{\theta}\in(-\infty,0)$. Отсюда вытекает справедливость утверждений 1), 2) и достаточность 3). Необходимость утверждения 3) вытекает из экстремальных свойств характеристических чисел регулярного пучка форм.

Для получения конструктивного метода вычисления оценок из критерия для авторегрессии воспользуемся аналогичным подходом. Будем рассматривать функции:

$$\tilde{V}_N(b,\overset{\wedge}{\theta})=\tilde{U}_N^1(b)-\overset{\wedge}{\theta}\,\omega(b),\ \overset{\wedge}{\theta}\in R_1$$

$$\tilde{V}_N(\overset{\wedge}{\theta})=\min_{bC\tilde{B}\in R_r} V_N(b,\overset{\wedge}{\theta}).$$

Тогда

$$\tilde{U}_N^1(b)=(Y-A_Y b,\ Y-A_Y b);$$

$$\tilde{V}_N(b,\overset{\wedge}{\theta})=Y^T Y-(1+\gamma)\overset{\wedge}{\theta}+b^T(A_Y^T A_Y-\overset{\wedge}{\theta} I_r)b-2(Y^T A_Y)b.$$

Дифференцируя $V_N(b,\overset{\wedge}{\theta})$ по b и приравнивая производные к нулю получаем,

$$(A_Y^T A_Y-\overset{\wedge}{\theta} I_r)b=A_Y^T Y \qquad (5)$$

Тогда из (5) находим $\hat{b}(N,\hat{\theta}) = (A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r)^{-1}(A_Y^T Y)$ и, следовательно

$$\widetilde{V}_N(\hat{\theta}) = Y^T Y - (1+\gamma)\hat{\theta} - Y^T A_Y (A_Y^T A_Y - \hat{\theta} I_r)^{-1} A_Y^T Y,$$

Лемма. Для функции $\widetilde{V}_N(\hat{\theta})$, связанной с задачей (1), справедливы следующие утверждения:

1). все корни уравнения

$$\widetilde{V}_N(\hat{\theta}) = 0 \qquad (6)$$

(если они существуют) неотрицательны;

2). уравнение (6) на полусегменте $[0;\wedge_{\min}(N))$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}'_1(N)$, где $\wedge_{\min}(N)$ - наименьшее собственное число матрицы

$A_Y^T A_Y$

3). существование корня $\hat{\theta}'_1(N)$ на полусегменте $[0,\wedge_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи (1).

При этом

$$\min_{bC\widetilde{B}\in R_r} \omega^{-1}(b)\widetilde{U}_N^1(b) = \frac{\widetilde{U}_N^1(\hat{b}(N))}{\omega(\hat{b}(N))},$$

где

$$\hat{b}(N) = (A_Y^T A_Y - \hat{\theta}_1(N) I_r)^{-1} A_Y^T Y .$$

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущей леммы.

Литература.

1. Титомир Л.И., Кнеппо П. Математическое моделирование биоэлектрического генератора сердца. – М., 1999. – 147 с.
2. Peshekhonov A.N. Piecewise linear approximation of nonlinear dynamic systems at presence of hindrances in output signals

//The International Conference of Intelligent systems and information technologies in control: Theses of reports June 19-23, 2000. – St. Petersburg / Pskov, Russian Federation. – P. 24-27. – P. 206-208.