О СВЯЗИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ЛАПЛАСИАНА

Ковтун И.И.

Национальный аграрный университет Украины,
Технический учебно-научный институт, кафедра высшей и прикладной математики,
Украина, 03041, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15
e-mail: ira@otblesk.com

В [1] нами установлено выражение моментов решения уравнения Риккати со случайным коэффициентом через моменты решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Здесь мы покажем связь уравнения Риккати с бесконечномерным лапласианом Леви [2], который определяется формулой $\Delta_L F(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(F''(x_0) f_k, f_k \right)_H$, где $F(x)$ - скалярная функция на гильбертовом пространстве H, $F''(x)$ - гессиан функции, $\{f_k\}_1^\infty$ - ортонормированный базис в H. Обозначим через C множество всех цилиндрических дважды сильно дифференцируемых функций. Лапласиан Леви на таких функциях равен нулю. Через T обозначим совокупность всех функций вида $V(x) = \varphi(Q) S_V(x)$, где $Q(x) = \|x\|_H^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (x, f_k)_H$, а $S_V \in C$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x, f_k)_H$ сходится почти всюду на H. Множество T - линейно и всюду плотно в $L_2(H, \mu)$ - в гильбертовом пространстве функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ. Выберем функцию $\varphi(z)$ так, чтобы $\kappa(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ $(\varphi(z) \neq 0)$ удовлетворяла уравнению Риккати

$$\kappa'(z) + 2\kappa^2(z) + 2\kappa(z) = 0 . \qquad (1)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид $\kappa(z) = -\frac{1}{1 + ce^{2z}}$, где c - постоянная, $-\infty < z < \infty$.

Теорема. Лапласиан Леви на T существует и является оператором умножения на функцию $-\kappa^2(Q(x))$, т.е.

$$\Delta_L V(x) = -\kappa^2 \left(Q(x) \right) V(x) .$$

Если выбирать различные значения c в решении уравнения Риккати (1), то получим разные операторы. Так, если $c = b > 0$, то $0 < \kappa^2(z) \leq 1$ $(-\infty < z < \infty)$ и решение уравнения (1) - ограниченный оператор.

Литература

1. Ковтун И.И. О моментах решения уравнения Риккати //Spectral and evolution problems, v.16, Simferopol. 2006, P. 70-75.
2. Levy P. Problemes concrets d'analyse fonctionnelle. Paris. Gautier-Villars, 1951.