

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Пожидаева Е.В.

Астраханский государственный университет,
Факультет математики и информационных технологий, каф. математического анализа,
Россия, 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 20-а,
Тел.: (8512) 61-08-83,
E-mail: pozhidaeva_e_v@mail.ru

Пусть $L = tx + \partial$ – дифференциальный оператор, который определяет дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = xt g + \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Рассмотрим произведение:

$$\prod (1 + L(t_i)\Delta), \text{ где } t \in [0; T].$$

Обозначим через $V_i = L(t_i)\Delta$, тогда произведение $\prod (1 + L(t_i)\Delta)$ примет вид:

$$\prod (1 + V_i) = 1 + \sum_i V_i + \sum_{i < j} V_i V_j + \dots, [i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n].$$

Перейдем к пределу в обеих частях полученного выражения и ограничимся рассмотрением только первых трех слагаемых:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod (1 + V_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i V_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i < j} V_i V_j = 1 + \int L dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i < j} V_i V_j.$$

Сомножители V_i и V_j не перестановочны между собой, так как коммутатор

$$[V_i, V_j] \neq 0, \text{ поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i < j} V_i V_j = \frac{\left(\int (tx + \partial) dt\right)^2}{2} - \frac{t^3}{12}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{T_0} (1 + (tx + \partial)) dt = 1 + \int (tx + \partial) dt + \frac{\left(\int (tx + \partial) dt\right)^2}{2} - \frac{t^3}{12}.$$