

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ

Ровенская О.Г., Новиков О.А.¹

Донбасская государственная машиностроительная академия, Украина,
84313, г. Краматорск, Шкадинова, 72, o.rovenskaya@mail.ru

¹Донбасский государственный педагогический университет, Украина,
84116, г. Славянск, Г. Батюка, 19, sgpi@slav.dn.ua

Асимптотические формулы для точных верхних граней уклонений сумм Фурье на классах аналитических периодических функций одной переменной установлены в работах [1], [2]. Исследованы вопросы приближения многомерных аналогов указанных классов прямоугольными суммами Фурье. Получены асимптотические формулы, которые в ряде случаев обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского. Приведём некоторые результаты (см. обозначения, напр., в [2]).

Теорема. Пусть $\psi_i(x) \in D_{q_i}$, $\Psi_i(x) \in D_{Q_i}$, $q_i \in (0; 1)$, $Q_i \in (0; 1)$, $\beta_i, \beta_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда при $n_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{m\psi}; S_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}} \|f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f; \vec{x})\|_C = \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^m \psi_i(n_i) K(q_i) + \\ + O(1) \left[\sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i) q_i}{(1-q_i) n_i} + \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i) \varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) < \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j} \right], \end{aligned}$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k \geq m} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)},$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $n_i, q_i, Q_i, \beta_i, \beta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* **Т. 10**, № 3, 1946. Стр. 207-256.
2. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // *Укр. мат. журн.* **Т. 52**, № 3, 2000. Стр. 375-395.