ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ПАРАМЕТРОМ

Мокин А.Ю.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ф-т Вычислительной математики и кибернетики каф. вычислительных методов.
E-mail: MknAndrew@mail.ru.

В работе изучаются спектральные свойства разностного оператора A, определённого в пространстве сеточных функций размерности N равенствами

$$(Ay)_i = -(ay_{\overline{x}})_{x,i}\ ,\ i = 1, 2, \dots, N, \quad (Ay)_N = -(2/h)(\gamma a_1 y_{\overline{x},1} - a_N y_{\overline{x},N}), \quad y_0 = 0.$$

Здесь $h = 1/N$, функция $a = a(x_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, параметр $\gamma \in \mathrm{C}$. Оператор A возникает в результате аппроксимации на равномерной сетке нелокальной задачи теплопроводности

$$u'_t = (k(x)u'_x)'_x + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$u(0,t) = 0, \quad \gamma k(0)u'_x(0,t) = k(1)u'_x(1,t), \quad t > 0.$$

Устойчивость разностных схем, аппроксимирующих данную задачу, зависит от спектральных свойств оператора A, таких как знак вещественной части и кратность собственных значений. Условия устойчивости могут быть получены как следствие априорных оценок спектра.

Доказаны следующие свойства:

1. При любом $\gamma \in \mathrm{C}$ алгебраическая кратность собственных значений оператора A не превосходит двух, только вещественные положительные собственные числа могут иметь двойную кратность. Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция.

2. Оператор A выроджен тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$. Собственное число $\lambda = 0$ является простым.

3. При $\gamma > 1$ существует единственное отрицательное собственное значение. Если $\gamma < 0$, то отрицательных собственных чисел в спектре нет.

4. Если $\mathrm{Im}(\gamma) \neq 0$, то оператор A не имеет вещественных собственных значений.

5. При любом комплексном $\gamma : |\gamma| \leqslant 1$ все отличные от нуля собственные числа имеют положительную вещественную часть и принадлежат множеству
$\{z \in \mathrm{C} : |z - r| \leqslant r,\ |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 2^h r\}$, где $r = 2h^{-2} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} a_j$.

Литература.

1. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Разностные схемы для нелокальных задач. // Известия Вузов. Математика. 2005. №1 (512). С. 40-51.

2. Мокин А.Ю. О спектральных свойствах одного несамосопряжённого разностного оператора. // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т.2, №2. С. 143-150.