О ПОСТРОЕНИИ «УДОБНЫХ» ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

Белова Л. Ю.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кафедра компьютерной безопасности
и математических методов обработки информации
Россия, Ярославль, 150000, ул. Советская, 14
Тел. (4852) 458073, эл.почта luk1945@yandex.ru

Обсуждается задача нахождения возможно большего количества невырожденных целочисленных квадратных матриц небольших размеров, например, до порядка 8, элементы которых находятся в определённом интервале, скажем от –9 до 9 и для которых обратные матрицы удовлетворяют тем же условиям.

Вопрос возник в связи с практическими учебными потребностями пополнения запаса упражнений по линейной алгебре, в частности, по нахождению канонической формы линейного оператора. В классических задачниках упражнения на эту тему в большой степени текстуально повторяются, в сумме их набирается не более трёх десятков и только для размерностей 3 и 4.

Хотелось бы пополнить этот запас При переходе к более высоким размерностям осложняется вопрос нахождения собственных значений. Но корни можно указывать в условии упражнения, так как задача нахождения корней многочлена относится к другой теме. Остаётся вопрос построения матрицы перехода. Матрицы A оператора в исходном и G в жордановом базисах связаны соотношением $G=C^{-1}\cdot A\cdot C$, где C матрица перехода. То есть, для определения исходной матрицы $A=C\cdot G\cdot C^{-1}$ надо выбрать жорданову форму G, что не представляет трудностей, и матрицу перехода C. Для ручных вычислений хотелось бы, чтобы все матрицы были целочисленными, заодно это снимет вопрос о точности вычислений. Эти требования к матрице C и приводят к исходному вопросу заметки.

Матрицы C специальных видов – треугольные, блочно-диагональные, и т. п. не совсем интересны, хотелось бы строить матрицы общего вида. Для этого были испробованы различные подходы.

1. LU—произведение: если L и U нижне- и верхне- унитреугольные целочисленные матрицы, то их произведение LU=C является целочисленной матрицей с определителем detC=1. При этом проблема ограничения коэффициентов C и C^{-1} не имеет хорошего решения. Остаётся перебор и отбор подходящих матриц.

2. n-1 строку матрицы C заполнить произвольными целочисленными векторами, с координатами, взаимно простыми в совокупности, а последнюю строку найти как решение диофантова уравнения $x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_nA_n=1$, где A_1, A_2, $\ldots A_n$ – алгебраические дополнения к последней строке. Если A_i также взаимно просты в совокупности, уравнение имеет бесконечное множество решений. Проблема ограничения элементов C и C^{-1} остаётся. В результате численных компьютерных экспериментов получены некоторые новые матрицы, однако, хотелось бы получить большее количество примеров. Отметим, что матриц с указанными ограничениями конечное число, однако непосредственный перебор слишком велик.