МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОМПОЗИЦИИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Кручинин В.В., Перминова М.Ю.

Россия, г. Томск, пр. Ленина 40

Производящие функции являются эффективным инструментом решения разнообразных математических задач, для которых известны операции сложения, вычитания, произведения, деления, дифференцирования и интегрирования. Однако операция нахождения выражений коэффициентов композиции производящих функций до настоящего времени не автоматизирована и является достаточно трудоемкой задачей. Известно [1], что для нахождения выражений коэффициентов композиции производящих функций $A(x) = R\big(F(x)\big)$, где $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ $F(x) = \sum_{n\geq 0} r(n)x^n$ необходимо

$$a(n) = \begin{cases} r(0), & n = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)r(k), & n > 0. \end{cases} \tag{1}$$

где $F^{\Delta}(n,k)$ являются коэффициентами производящей функции $F(x)^k = \sum_{n\geq k} F^{\Delta}(n,k)x^n$, для краткости назовем этот коэффициент композитой. При этом, как видно из (1), композита $F^{\Delta}(n,k)$ неизменна для всех композиций $R\big(F(x)\big)$, где $F(x)$ — фиксирована, $R(x)$ — произвольная. Теперь рассмотрим операции над композитами $F^{\Delta}(n,k)$. Исследования [2] показали, что зная для $F(x)$ — $F^{\Delta}(n,k)$ можно получить соответствующие композиты для $\alpha F(x)$ и $F(\alpha x)$, обратной поизводящей функции $\big[F(x)\big]^{-1}$, композиты для функционального уравнения $A(x) = xG\big(A(x)\big)$. А зная еще композиту для $G(x)$ — $G^{\Delta}(n,k)$ можно получить композиты суммы производящих функций $F(x)+G(x)$, произведения $F(x)G(x)$, частного $F(x)/G(x)$, для $G(0)! = 0$ и композиции $G\big(F(x)\big)$. Предлагаемый метод был апробирован с использованием онлайн энциклопедии целых последовательностей (www.oeis.org). Было получено и вписано свыше 500 выражений коэффициентов композиций производящих функций. Например, для экспоненциальной производящей функции $\exp\big(\sin(x)\big) = 1 + \sum_{n>0} a(n)x^n/n!$ выражение коэффициента, записанного в OEIS под номером A002017, имеет вид:

$$a(n) = 2\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{2j-n}}{(n-2j)!} \sum_{i=0}^{\frac{n-2j}{2}} (2j+2i-n)^n\ (-1)^{n-j-i} \binom{n-2j}{i}.$$

Литература.

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. т. 1: Начала теории. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1967. — 486 с.
2. V. V. Kruchinin, Compositae and their properties, preprint, http://arxiv.org/abs/1103.2582.