# О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ФОКУСНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

**Т.А. Ракчеева**

Институт машиноведения РАН,
Россия, 117334, Москва, ул. Бардина, 4, e-mail: rta_ra@list.ru

Исследуется сходимость фокусной аппроксимации в классе многофокусных лемнискат, обсуждаемой в ряде работ автора [1]. Инвариант лемнискаты на комплексной плоскости есть модуль полинома, имеющего корнями $m$ ее фокусов:

$$|F(z)| = R^m. \tag{1}$$

Задача фокусной аппроксимация состоит при этом в нахождении комплексных коэффициентов $c_k=a_k+ib_k$ полинома $F(z)$ и вещественного радиуса $R$ таких, что лемниската, определяемая уравнением (1), в некотором смысле приближала бы кривую, заданную $n$ точками. Непосредственный поиск коэффициентов комплексного полинома $F(z)$ сводится к минимизации функционала:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|F(z_j)\right|^2 - R^2\right)^2 \to \min, \tag{2}$$

дающего нелинейную систему уравнений, степени 3, независимо от числа фокусов.

Предпочтительнее представляется метод фазовой окружности [1], в котором точки ($j$=1,…,$n$) считаются приближенно лежащими на окружности радиуса $R$ с центром в 0 и диапазоном аргументов $2\pi m$. Для нахождения $F(z_j)$ можно выбрать $n$ точек $w_1$, …, $w_n$, на единичной окружности, т.е. $w_j = e^{i\theta_j}$, $\theta_j \le \theta_{j+1}$, $\theta_j \in [0,\ 2\pi m]$, и поставить задачу о нахождении $F(z)$ такого, чтобы его значения в заданных точках $F(z_j)$ были возможно ближе к $Rw_1$, …, $Rw_n$. Эта задача сводится к нахождению комплексного полинома $F(z)$, минимизирующего несколько другой, чем (2), более сильный, функционал:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|F(z_j) - Rw_j\right|^2 \to \min,$$

который приводит к линейной системе уравнений вида (для $R$ = 1):

$$\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j^l \bar{z}_j^k\right)c_l = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{z}_j^k, \quad k = 0, \dots, m. \tag{3}$$

Сходимость алгоритма обеспечивается доказательством двойного неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|F^k(z_j) - w_j^k\right|^2 > \sum_{j=1}^{n}\left|F^k(z_j) - w_j^{k+1}\right|^2 > \sum_{j=1}^{n}\left|F^{k+1}(z_j) - w_j^{k+1}\right|^2,$$

части которого соответствуют радиальной и фазовой компонентам приближения.

Алгоритмическая процедура определения коэффициентов аппроксимирующего полинома $F(z)$ представляет собой, таким образом, итерационный процесс уточнения приближения кривой с помощью лемнискаты, полином которой найден из (3).

**Литература**

1. *Ракчеева Т.А.* Фокусная аппроксимация на комплексной плоскости. //Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 51, № 11, 2011, сс. 1963–1972.