ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ У ОБОБЩЕННО РАВНОМЕРНО ВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

Дементьева А.М., Дементьев С.Н.[1]

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики,
Россия, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, тел.: (473) 2-715-362,
E-mail: alex_S_D1@mail.ru

[1]Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I,
кафедра высшей математики и теоретической механики,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1, тел.: (473) 2-537-371

Пусть E – вещественное банахово пространство, u_0 – фиксированный ненулевой элемент из конуса K, а E_{u_0} совокупность таких $x \in E$, для которых $-\gamma u_0 \le x \le \gamma u_0$ при некотором $\gamma > 0$. Для $x \in E_{u_0}$ введем u_0-норму:

$$\|x\|_{u_0} = \min\left\{\gamma : -\gamma u_0 \le x \le \gamma u_0\right\}.$$

Через $K(u_0)$ обозначим множество u_0-ограниченных элементов $x \in K$, для которых $\alpha(x)u_0 \le x \le \beta(x)u_0$, где $\alpha, \beta > 0$.

Нелинейный оператор $T : E \to E$ называется обобщенно равномерно вогнутым, если для любого конусного отрезка $\left\langle x_0, y_0 \right\rangle \subset K,\ x_0 \ne \theta$ оператор T переводит его в $K(u_0)$, т.е. $T\left\langle x_0, y_0 \right\rangle \subset K(u_0)$ и для любого конусного отрезка $\left\langle \mu u_0, \nu u_0 \right\rangle,\ \mu, \nu > 0$, и любого сегмента $[a,b] \subset (0,1)$ для $x \in \left\langle \mu u_0, \nu u_0 \right\rangle,\ \tau \in [a,b]$ выполнено одно из условий

$$T\left\langle \tau x,\ \frac{1}{\tau}x \right\rangle \subset \left\langle [1+\eta(\mu,\nu,a,b)]\tau Tx,\ \frac{1}{\tau}Tx \right\rangle;\ T\left\langle \tau x,\ \frac{1}{\tau}x \right\rangle \subset \left\langle \tau Tx,\ \frac{1}{[1+\eta'(\mu,\nu,a,b)]\tau}Tx \right\rangle,$$

где функции $\eta(\mu,\nu,a,b) > 0,\quad \eta'(\mu,\nu,a,b) > 0$ предполагаются непрерывными по $b \in (0,1)$.

Теорема. Пусть оператор T обобщенно равномерно вогнут. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) T имеет инвариантный конусный отрезок $\left\langle \mu u_0, \nu u_0 \right\rangle,\ \mu < \nu$;

б) T имеет единственную неподвижную точку x^*, к которой сходятся по u_0-норме последовательные итерации $T^n x$ при любом $x \in K,\ x \ne \theta$.

Литература.

1. *ОпойцевВ.И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов //Тр. моск. мат. о-ва, Т.36, 1978. Стр. 237 – 273.