

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Филатова Т.А.

Московский физико-технический институт, ф-т Нанотехнологий и информатики, каф.
Математики,
Россия, 123098, г. Москва, ул. Максимова, 4.
Тел.: 8-903-210-48-88,
E-mail: tatyana.filatova@gmail.com

Общая постановка данной задачи состоит в нахождении собственных значений (спектра) оператора

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_i \alpha_i \delta(x - x_i)$$

на гладкой поверхности M , $\dim M \leq 3$, в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$. Рассматривается случай $\dim M = 1$ и задача на спектр следующего оператора

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \alpha \delta(x - x_0)$$

в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1: Пусть $V(x) \rightarrow \infty$, при $|x| \rightarrow \infty$, и пусть существует число E_0 , т.ч. при различных значениях параметра α оно удовлетворяет $\text{mod } O(\hbar)$ следующим уравнениям:

1.
$$\int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(x))} dx = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{4}\right),$$
2.
$$\int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2(E - V(x))} dx = \pi \hbar \left(k + \frac{3}{4}\right), \quad \text{при } \alpha = O(1);$$
3.
$$\sin\left(\frac{1}{2\hbar} \oint_{\Gamma: \frac{p^2}{2} + V(x) = E} \sqrt{2(E - V(x))} dx + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha_0}{p(x_0)} \left(\cos\left(\frac{1}{2\hbar} \oint_{\Gamma: \frac{p^2}{2} + V(x) = E} \sqrt{2(E - V(x))} dx + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{1}{2\hbar}(\sigma_2 - \sigma_1)\right)\right), \quad \alpha = O(\hbar);$$
3.
$$\oint_{\Gamma: \frac{p^2}{2} + V(x) = E} \sqrt{2(E - V(x))} dx = 2\pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = O(\hbar^2).$$

Тогда $|E - E_0| = o(\hbar^2)$, где E – точка дискретного спектра \hat{H} .

Теорема 2: Пусть $V(x) \rightarrow 0$, при $|x| \rightarrow \infty$, и пусть $E > V(x)$, тогда спектр оператора \hat{H} непрерывный, и коэффициенты отражения (R) и прохождения (T) имеют следующий порядок при различных значениях α :

- $R = 1 + O(\hbar), T = O(\hbar)$, при $\alpha = O(1)$;
- $R, T = O(1)$, при $\alpha = O(\hbar)$;
- $R = O(\hbar), T = 1 + O(\hbar)$, при $\alpha = O(\hbar^2)$.