МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИМЕТРИЙ

Манолов А.И.

студент МФТИ, Россия, 117303, Москва, ул. Керченская 1А, 707-3, 89168694450, paraslonic@yandex.ru

Глобальное определение *метрической геометрии* посредством инвариантной квадратичной формы впервые использовал Герман Минковский в 1908 году [1]. Вводя метрику «единого» пространства-времени — мира *специальной теории относительности* (СТО), Минковский постулировал инвариантность *интервала* $-x_1^2 + x_2^2$ (для движения вдоль одной оси, x_1 — временная координата, x_2 — пространственная координата) во всех инерциальных системах отсчета.

Задавая инвариант иным образом, мы получим другие геометрии. Пусть М – метрическая матрица, а матрица В – матрица перехода в другой базис. Тогда из условия постоянства интервала следует:

$$\mathbf{B}'\mathbf{M}\mathbf{B} = \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = b_1\mathbf{E} + b_2\mathbf{N} = \mathrm{e}^{\alpha\mathbf{N}} \equiv \mathbf{B}(\alpha), \qquad 1)$$

Рассмотрим случай симметричной метрики $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, тогда нетрудно доказать (см. [2]):

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J} = (m_1\mathbf{J} - m_2\mathbf{I} + m_3\mathbf{F})/|\mathbf{M}| \equiv n_2\mathbf{F} + n_3\mathbf{I} + n_4\mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{N}| = |\mathbf{M}|^{-1},$$

где $\mathbf{F} \equiv \mathrm{diag}(-1, 1) \equiv (-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{I} \equiv (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{J} \equiv (\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1)$ – матрицы входящие в группу диэдра.

Не нарушая общности, можно полагать метрическую матрицу нормированной так, что $|\mathbf{M}| = \pm 1$. Поэтому, если $|\mathbf{M}| = 1$, то и $|\mathbf{N}| \equiv -n_2^2 - n_3^2 + n_4^2 = 1$. Эта дополнительная квадратичная форма позволяет полярным способом параметризовать структурную матрицу:

$$n_2 = \mathrm{sh}\beta\,\sin\gamma,\ n_3 = \mathrm{sh}\beta\,\cos\gamma,\ n_4 = \mathrm{ch}\beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \cos\alpha\mathbf{E} + \sin\alpha\mathbf{N} = \mathrm{e}^{\alpha\mathbf{N}}, \qquad (2)$$

— это вариант обобщенного *эллиптического* поворота, так как $\mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}$.

Для случая $|\mathbf{M}| = -1$, аналогично имеем:

$$n_2 = \mathrm{ch}\beta\,\sin\gamma,\ n_3 = \mathrm{ch}\beta\,\cos\gamma,\ n_4 = \mathrm{sh}\beta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathrm{ch}\alpha\mathbf{E} + \mathrm{sh}\alpha\mathbf{N} = \mathrm{e}^{\alpha\mathbf{N}}; \qquad (3)$$

— это вариант обобщенного *гиперболического* поворота, так как $\mathbf{N}^2 = \mathbf{E}$.

Случай кососимметричной метрики $\mathbf{M} = \mathbf{J}$ представляет самостоятельный интерес, так как кососимметричная матрица $\mathbf{J}$ автоконгруэнтна с множителем, равным детерминанту преобразующей матрицы: $\mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\,\mathbf{J}$. Следовательно, унимодулярные базисы $\mathbf{B}$, детерминант которых $|\mathbf{B}| \equiv 1$, можно интерпретировать как базисы *симплектических* планиметрий.

Литература

1.Принцип относительности. / Сост. Тяпкин А.А., М., Атомиздат, 1973, 332 с.
2.Смолянинов В.В. От инвариантов геометрии к инвариантам управления. / Интеллектуальные процессы и их моделирование. М., Наука, 1987, 66-110.