О МАРКОВСКОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ТРЕНИЯ

Горицкий Ю.А.

Московский энергетический институт (ТУ), каф. Мат. моделирования,
Москва, 111250, Красноказарменная, 14. E-mail: Goritskiy@yandex.ru

В работе предлагается описывать некоторые характеристики трения с помощью Марковских случайных функций. Процесс трения существенно зависит от топографии трущихся поверхностей, которые обычно описываются стационарными случайными полями. Характеристики полей медленно меняются во времени. Известно, что закон распределения ординат поверхностей изменяются во времени. Известно, что характеристики «шероховатости» во время приработки приходят к некоторому стационарному уровню, называемому «равновесной шероховатостью». Мы предполагаем, что этому уровню соответствует предельное распределение, и именно оно определяет установившийся режим трения.

Высота ξ в фиксированной точке поверхности изменяется вследствие взаимодействия с движущимися элементами другой поверхности $\eta(t)$. Представим изменение ξ дискретным во времени процессом, выбрав дискретность Δt так, чтобы воздействия $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ можно было считать независимыми (с распределением q_η). Результат ξ_{n+1} взаимодействия на шаге n+1 зависит от ξ_n и η_{n+1}: $\xi_{n+1} = f(\xi_n, \eta_{n+1})$. Функция f такова, что изменяет значение ξ_n, если имеется существенное «перекрытие» ξ_n и η_{n+1} на величину не менее Δ. Если дискретизировать значения ξ, то получим простую цепь Маркова. Поверхность ξ с распределением p_ξ аналогично влияет на η, и для любого элемента поверхности η справедливо: $\eta_{n+1} = g(\eta_n, \xi_{n+1})$. Задаваясь механизмами взаимодействия f и g, получим системы уравнений для предельных распределений p* и q*:

$$p^* = p^* P_\xi(q^*, f), \quad q^* = q^* P_\eta(p^*, g),$$

где $P_\xi(q^*, f)$, $P_\eta(p^*, g)$ – матрицы переходных вероятностей соответственно для последовательностей ξ_n и η_n. Матрицы определяются распределениями p* и q* и механизмами взаимодействия f и g.

Опытные данные говорят о том, что время между изменениями составляет десятки Δt. Это позволяет перейти к непрерывной модели заменой геометрического распределения показательным с параметром λ_ξ: $\lambda_\xi(x, t) = \left(V/\tau\right)\int_{-\infty}^{x-\Delta} q_\eta(y,t)dy$, где V – скорость проскальзывания, τ - интервал корреляции для поверхности η. Процесс $\xi(t)$ находится в состоянии x случайное время (с показательным законом с параметром $\lambda_\xi(x, t)$), и затем переходит в z с плотностью $h(x, z)\cdot$, определяемой $q_\eta(y,t)$ и преобразованием $f_1(x, \eta)$. Уравнение Колмогорова для плотности $p_\xi(x,t)$ скачкообразного процесса $\xi(t)$:

$$\frac{\partial p_\xi(x,t)}{\partial t} = -\lambda_\xi(x,t)p_\xi(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_\xi(z,t)p_\xi(z,t)h_\xi(z,x)dz.$$

Выписав аналогичное уравнение для $q_\eta(y,t)$, получаем описание процесса изменения поверхностей. В работе для предельных распределений выписываются уравнения, которые при некоторых f и g сводятся к дифференциальным.