МАТРИЧНЫЕ НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Чуйко С.М.

Донбасский государственный педагогический университет,
Украина, 84112, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Лозановича 14-31,
e-mail: *chujko-slav@inbox.ru*

Найдены необходимые и достаточные условия существования решения матричной нетеровой ($m \neq n \neq \lambda \neq \mu$) краевой задачи

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}, \quad F(t) \in \mathbb{C}[a,b]. \qquad (1)$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot): \ C^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Как известно [1], общее решение $W(t,\Theta) := U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ однородной части матричного уравнения (1) определяют нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_n, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_n, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ задачи Коши для уравнения (1) имеет вид [2]

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad K[\Phi(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\, ds.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}]: \ \mathbb{R}^{\ell\times n} \to \mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, а также обратный оператор [3]. Пусть $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема. *При условии $P_{\mathcal{Q}^*}M\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0$ и только при нем общее решение $Z(t) \in C^1[a;b]$ матричной нетеровой краевой задачи (1)*

$$Z(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r) + G[F(s);\mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r}c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[F(s);\mathcal{A}](t) := W\{t, \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+M[\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)]\}\} + K[F(s)](t).$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}: \mathbb{R}^{m\cdot n\times m\cdot n} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, где

$$\mathcal{Q} := [\ M[\mathcal{Q}^{(1)}] \ ... \ M[\mathcal{Q}^{(m\cdot n)}]\ ] \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times m\cdot n}, \quad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}_i U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

[1]. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с.

[2]. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. – 2014. - № 1-2.

[3]. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского ун-та. Сер. математика и механика. — 2014, **19**, Вып. 1 (21), С. 49 — 57.