СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АССОРТАТИВНЫХ И ДИСАССОРТАТИВНЫХ СЕТЕЙ

Гаджиев Б. Р., Прогулова Т. Б., Щетинина Д. П.

(Россия, г. Дубна)

Мы обсуждаем проблему устойчивости локально-мировых некоррелированных, ассортативных и дисассортативных сетей к случайным отказам и направленным атакам. Определены топология этих сетей, построены зависимости доли вершин, принадлежащих максимальной компоненте сети от доли удаленных вершин. Определены зависимости пороговых значений от размера локального мира.

Введение. Любую систему в природе и обществе можно представить в виде сети, где узлы — элементы системы, а ребра — отношения, существующие между этими элементами. Многочисленные примеры включают биологические сети, сети химических связей, сети социальных контактов, технологические сети, такие как транспортные, интернет, WWW и т.д. Современные подходы статистической физики позволили разработать последовательные методы описания топологии и эволюции сложных систем реального мира. Изучение структуры сетей реального мира показало что, сложные сети по форме распределения степеней разделяются на случайные (сети Эрдеша-Рэньи (ER)), маломировые (сети Ваттса-Строгатца) и масштабно-инвариантные (SF). Распределение степеней SF сетей подчиняется степенному закону $p(k) \sim k^{-\gamma}$, где γ показатель степени. В отличие от случайных и маломировых, SF сети сильно неоднородны.

Процессы на сетях существенно зависят от их топологии. Так, например, распространение эпидемии в масштабно-инвариантных сетях не всегда имеет порог [1]. Кроме этого, исключительно важно исследование проблемы устойчивости сетей к случайным отказам и направленным атакам. В [1] показано, что SF сети показывают неожиданно большую степень надежности, т.е. способность сети в целом к функционированию при нереально высоком числе случайных отказов узлов. Одновременно, эти сети чрезвычайно уязвимы для направленных атак, т.е. при удалении немногочисленных концентраторов они «рассыпаются». Сетям реального мира присущи корреляции степеней узлов. В этом смысле на уровне двухточечных корреляционных функций масштабно-инвариантные сети разделяются на три класса: ассортативные, дисассортативные и случайные SF сети. Несмотря на то, что все три типа сетей имеют распределение степеней в виде $p(k) \sim k^{-\gamma}$, процессы распространения в этих сетях существенно различаются.

Данная работа посвящена моделированию сложных сетей с заданной топологией и корреляцией степеней вершин, и изучению их устойчивости по отношению к случайным отказам и направленным атакам.

Правила генерации сетей. Для исследования устойчивости ассортативных и дисассортативных сетей мы генерировали сети на основе модели Калдарелли [2], являющейся обобщением модели предпочтительного присоединения Барабаси–Альберт (БА) [1]. В модель БА заложены два механизма — рост и предпочтительное присоединение. Генерация сети начинается с m_0 изолированных вершин, в каждый момент времени *t* к сети добавляется новая вершина, которая связывается *m* ребрами с уже существующими в сети вершинами. Вероятность $\prod_i$ того, что новая вершина окажется связанной ребром с вершиной *i* зависит от ее степени k_i: $\prod_i = k_i / \sum_j k_j$, где суммирование производится по всем вершинам сети. Для больших *t* такая модель приводит к сети с распределением степеней $p(k) = 2m^2 / k^3$. Однако, сетям реального мира присущи корреляции степеней и $1 \le \gamma \le 3$, что потребовало обобщения модели БА.

В модели Калдарелли вводится дополнительный механизм, а именно, добавление новых ребер между уже присутствующими в сети вершинами. Сеть генерируется следующим образом:

1. С вероятностью p к сети добавляется новая вершина. Она соединяется с какими-либо из уже присутствующих вершин в соответствии с правилом предпочтительного присоединения.

2. С вероятностью $(1-p)$ новое ребро соединяет две старые вершины. Вершины при этом выбираются с учетом их степеней. Вероятность того, что новое ребро свяжет вершины i и j, определяется как $\widetilde{P}_1(k_i, k_j) = P_1(k_i)P_2(k_j \mid k_i)$. $P_1(k_i)$, вероятность выбора первой из двух вершин, снова определяется в соответствии с правилом предпочтительного присоединения. Функциональная форма $P_2(k_j \mid k_i)$ может быть выбрана так, чтобы способствовать связыванию между вершинами с близкими или же различающимися степенями. Для моделирования ***ассортативных*** сетей в [2] предлагается использовать одну из двух функциональных форм:

$$P_2(k_j \mid k_i) \propto \frac{1}{\left|k_i - k_j\right| + 1} \text{ или } P_2(k_j \mid k_i) \propto \exp(-\left|k_i - k_j\right|).$$

Для моделирования ***дисассортативного*** смешивания в [4] предлагается использовать:

$$P_2(k_j \mid k_i) \infty \left|k_i - k_j\right|.$$

Дальнейшие исследования сетей реального мира показали, что в ряде случаев механизм предпочтительного присоединения действует локально. Этот эффект учтен в локально-мировой (ЛМ) модели [3]. Здесь новая вершина может связаться со старыми только в пределах локального мира новой вершины

Генерация растущей ЛМ сети осуществляется в соответствии со следующим итерационным алгоритмом:

1. *Рост.* Генерация сети начинается с небольшого числа m_0 изолированных вершин, в каждый момент времени t к сети добав-

ляется новая вершина, которая должна быть связана с уже существующими вершинами m ($m = m_0$) ребрами.

2. *Локальное предпочтительное присоединение.* В каждый момент времени t, перед тем, как соединить новую вершину с уже существующими, случайным образом выбирается M вершин, тем самым формируется «локальный мир». Ребра добавляются между новой вершиной и m вершинами локального мира. Таким образом, вероятность связывания некоторого узла i локального мира с новым узлом равна:

$$\Pi_{local}(i) = \frac{M}{m_0 + t} \frac{k_i}{\sum_{j \in local} k_j} .$$

ЛМ модель имеет два очевидных предельных случая. Когда $T \geq M = m = m_0$, механизм предпочтительного присоединения не работает, и сеть имеет распределение степеней в виде $p(k) \sim \exp(-k / m)$. Если $M \geq m_0 + T - 1$, вся сеть фактически является «локальным миром», модель превращается в стандартную БА модель SF сети.

Результаты моделирования. В соответствии с вышеописанными моделями мы генерировали ассортативные, дисассортативные и локально-мировые сети. Для каждого типа сетей мы строили распределение степеней и зависимость средней степени ближайших соседей вершины от ее степени $\overline{K}_{nn}(k)$. Для анализа устойчивости рассматривалось два типа воздействий — случайные отказы узлов и направленные атаки. В первом случае из сети случайным образом удалялась доля вершин q. Во втором, из сети удалялись вершины со степенью $k > k_{cutoff}$. Строились зависимости доли вершин сети, принадлежащих наибольшей связанной компоненте, от доли удаленных вершин (при изменениях q и k_{cutoff}, соответственно). Определялся порог, то есть такое значение доли удаленных вершин, при котором сеть «рассыпается».

На рис.1 приведены распределения степеней вершин для сетей a) ассортативной, b) дисассортативной и для сравнения c) некоррелированной SF. Параметры моделирования: $m_0 = 6$, полное число вершин 10003, параметр модели Калдарелли $p = 0.3$.

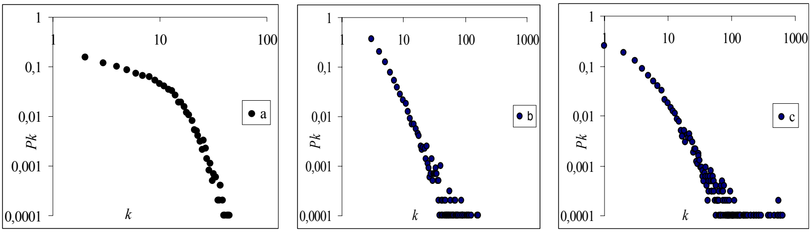

Рис.1. Распределения степеней для a) ассортативной сети, b) некоррелированной SF сети; c) дисассортативной сети

На рис.2 показаны зависимости $\overline{K}_{nn}(k)$ для вышеуказанных трех сетей. Очевидно, что сеть a) имеет ассортативных характер, b) дисассортативный, а сеть c) некоррелирована.

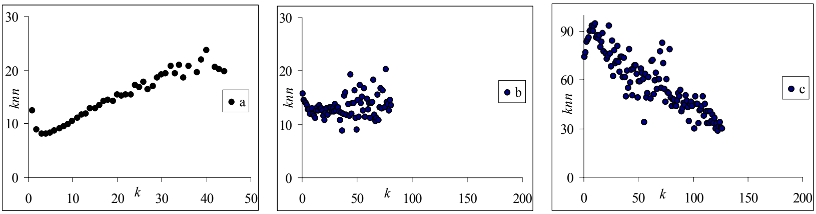

Рис.2. Распределения степеней для a) ассортативной сети, b) некоррелированной SF сети; c) дисассортативной сети

Результаты исследования устойчивости этих сетей по отношению к направленным атакам и случайным отказам (рис. 3 и 4) показывают, что по отношению к случайным отказам некоррелированные и коррелированные сети ведут себя практически одинаково. По отношению к направленным атакам устойчивость дисассортативных сетей оказывается значительно меньше, чем для некоррелированных SF сетей, а устойчивость ассортативных, напротив, значительно выше.

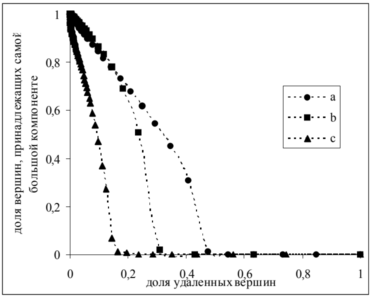

Рис. 3. Устойчивость по отношению к направленным атакам для сетей a) ассортативной, b) некоррелированной SF; c) дисассортативной

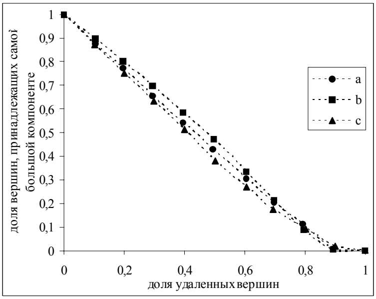

Рис. 4. Устойчивость по отношению к случайным отказам для сетей a) ассортативной, b) некоррелированной SF; c) дисассортативной

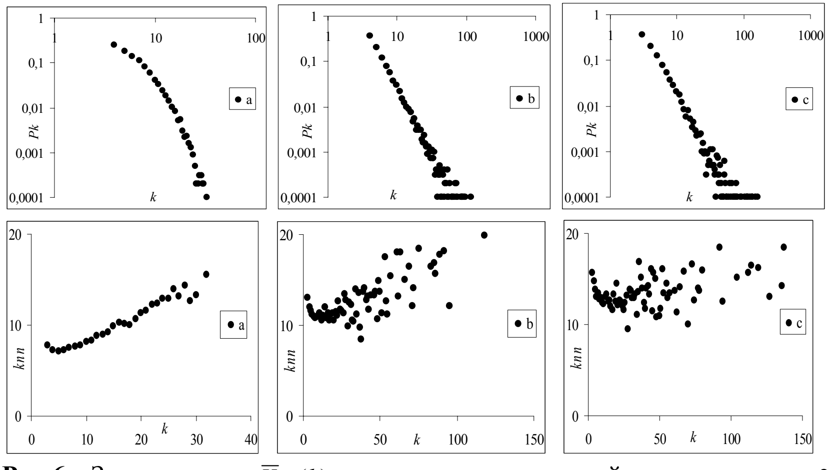

Рис.6. Зависимость $\overline{K}_{nn}(k)$ для локально-мировой сети: $m = m_0 = 3$, $T = 10000$, a) $M = 3$; b) $M = 50$; c) $M = 500$

Анализ устойчивости ЛМ сетей проводился для различных размеров локального мира M. На рис.5 приведены распределения степеней вершин для различных ЛМ сетей.

Зависимости $\overline{K}_{nn}(k)$ (рис. 6) указывают на то, что ЛМ сети имеют ассортативный характер, однако при увеличении размера локального мира степень корреляции уменьшается. Результаты исследования устойчивости ЛМ сетей по отношению к направленным атакам и случайным отказам (рис. 7 и 8) показывают, что по отношению к случайным отказам устойчивость ЛМ сетей от размера локального мира M практически не зависит. По отношению к направленным атакам пороговые значения уменьшаются с ростом размера малого мира M .

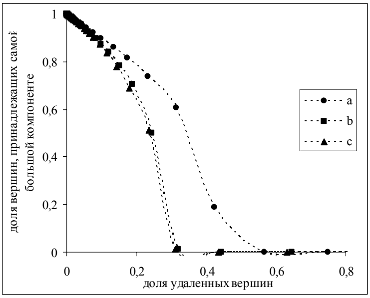

Рис. 7. Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМ сети: $m = m_0 = 3$, $T = 10000$, a) $M = 3$; b) $M = 50$; c) $M = 500$

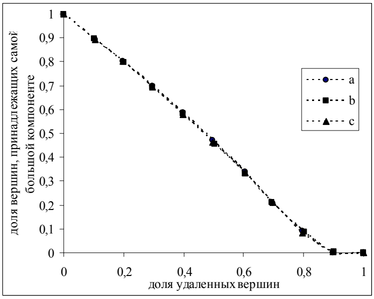

Рис. 8. Устойчивость по отношению к случайным отказам для ЛМ сети: $m = m_0 = 3$, $T = 10000$, a) $M = 3$; b) $M = 50$; c) $M = 500$

Обсуждение результатов. Таким образом, можно утверждать, что по отношению к случайным отказам некоррелированные и коррелированные сети ведут себя практически одинаково. По отношению к направленным атакам устойчивость дисассортативных сетей оказывается значительно меньше, чем для некоррелированных SF сетей, а устойчивость ассортативных сетей, напротив, значительно выше.

С ростом размера локального мира M топология ЛМ сети трансформируется от экспоненциальной к степенной, при этом происходит переход от ассортативной сети к некоррелированной. Следовательно, изменение размера локального мира позволяет управлять устойчивостью сети. Пороговые значения устойчивости локально-мировой сети по отношению к направленным атакам уменьшаются с увеличением размера локального мира M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albert R., Barabasi A.-L. Statistical Mechanics of Complex Networks// Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74, №1. P. 43–97.
2. Catanzaro M., Caldarelli G., Pietronero L. Assortative model for social networks// Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 037101.
3. Sun S. Error and attack tolerance of evolving networks with local preferential attachment // Physica A. 2007. Vol. 373. P. 851–860.

ERROR AND ATTACK TOLERANCE OF EVOLVING ASSORTATIVE AND DISASSORTATIVE NETWORKS

Gadjiev B. R., Progulova T. B., Shchetinina D. P.

Russia, Dubna

We discuss a problem error and attack tolerance of the locally-world, non correlated, assortative and disassortative networks. We define a topology of these networks and the dependences of the largest connected cluster size on a fraction of the removed nodes.