О НАХОЖДЕНИИ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ковтун И. И.

(Украина, Киев)

Рассматривается система дифференциальных уравнений со случайными возмущениями коэффициентов. Получено операторное уравнение для нахождения характеристического функционала решения. Указан метод решения этого уравнения и тем самым определены моментные уравнения решения.

Дифференциальные уравнения и системы уравнений дифференциальных уравнений — одна из наиболее распространенных математических моделей, описывающих технологические процессы. Как правило, характеристики таких процессов, предполагаются детерминированными. Однако, существтственно и влияние на характеристики таких процессов различных флуктуаций, возникающих под влиянием случайных сил. Флуктуации, т.е. неупорядоченные отклонения от среднего значения, для каждой конкретной задачи имеют различный характер. Это могут быть случайные возмущения частоты механических колебаний [4], колебания электрического контура [5] и т.д. Природа флуктуаций может быть различной, однако, методы их теоретического исследования очень похожи. Найдя решение математической модели, полученные результаты можно интерпретировать в соответствии с решаемой физической задачей. При исследовании задач, учитывающих влияние случайных сил, статистическая природа флуктуаций считается известной из самой постановки задачи.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_{kj}(t) + \xi_{kj}(t,\omega)\right) x_j(t,\omega), \quad k = 1,2,...,n, \tag{1}$$

где $a_{kj}(t)$, $k, j = 1,2,..,n$, — непрерывные функции на $[0,T]$, $\xi_{kj}(t,\omega)$ — случайные процессы, $\omega \in \Omega$ (Ω — вероятностное пространство), с начальными условиями

$$x_k(0,\omega) = x_k^0(\omega), \tag{2}$$

Исследованию систем дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами посвящено много работ (см., например библиографию в [1]).

Нами в [3—6] рассмотрены следующие случаи: случайные процессы $\xi_{kj}(t,\omega)$ дельта-коррелированные гауссовские; $\xi_{kj}(t,\omega)$ — негауссовские дельта-коррелированные процессы со средними, равными нулю, и такими кумулятивными функциями $K_m^{kj}(t_1,...,t_{m-1},t) = s_m^{kj}(t)\delta(t_1 - t_2)\cdots\delta(t_{m-1} - t)$, что ряды $\sum_{m=1}^{\infty} m s_m^{kj}(t), \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) s_m^{kj}(t)$ равномерно сходятся; $\xi_{kj}(t,\omega)$ — непрерывные процессы со средними равными нулю и такие, что производные $\xi'_{kj}(t,\omega)$ — гауссовские дельта-коррелированные процессы. Тогда, если $K_{kj}(t,s)$ — ковариационные функции заданных процессов, то ковариационные функции производных процессов $\xi'_{kj}(t,\omega)$ имеют вид: $Q_{kj}(t,s) = \dfrac{\partial^2 K_{kj}}{\partial t \partial s} = c_{kj}(s)\delta(t-s)$ и выполняется условие $\dfrac{\partial^2 K_{kj}(t,s)}{\partial t \partial s} = -\dfrac{\partial^2 K_{kj}(t,s)}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2 K_{kj}(t,s)}{\partial s^2}$.

Для систем дифференциальных уравнений первого порядка вида (1) и дифференциальных уравнений второго порядка нами в [3—6] получены моментные уравнения при указанных условиях на заданные случайные процессы. При этом используется то, что решение системы (1) является функционалом зависящим от $\xi_{kj}(t,\omega),\ k,j=1,2,...,n$. В этом случае средние от произведения случайных процессов и функционалов от этих процессов можно виразить через вариационные производные [2], [6].

В этой статье приводится другой подход к решению систем

$$dx(t,\omega)+A(t)x(t,\omega)dt=B(t)\xi(t,\omega)x(t,\omega)dt+x_0\delta(t-t_0)\,, \quad (3)$$

где $A(t), B(t)$ — матрицы, элементы которых абсолютно интегрируемые функции, $\xi(t,\omega)$ — векторный случайный процесс с характеристическим функционалом $\Phi[v(t)]=\exp i\int\limits_0^\infty v(s)\xi(s,\omega)ds$.

Введем функционал $F[v,t]=E\{x(t,\cdot)\exp i\int\limits_0^\infty v(s)\xi(s,\cdot)ds\}$,

где $x(t,\omega)$ — решение уравнения (3). Представим $F[v,t]$ в виде $F[v,t]=\Phi[v(t)]g[v,t]$.

Тогда среднее значение решения

$E\{x(t,\cdot)\}=F[0,t]=g[0,t]$.

Для нахождения $g[v,t]$ имеем операторное уравнение, которое содержит как обыкновенные, так и вариационные производные

$$\frac{dg[v,t]}{dt}+A(t)x(t,\omega)=iB(t)\left(\frac{\delta\ln\Phi[v]}{\delta v(t)}g[v,t]+\frac{\delta g[v,t]}{\delta v(t)}\right)+\delta(t-t_0) \quad (4)$$

Это уравнение можно решить с помощью рядов:

$$g[v,t]=g_0(t)+\int\limits_0^t g_1(t,s)v(s)ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_2} g_2(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)ds_1ds_2+...$$

$$\frac{\delta\ln\Phi}{\delta v(t)}=-\int\limits_0^t K_\xi(t,s)v(s)ds+i\int\limits_0^t F(t,s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)ds_1ds_2+...$$

Тогда из (3) получаем систему для нахождения $g_0(t), g_1(t,s),...$:

$$\begin{cases} L_0(t)g_0(t) &= x_0\delta(t-t_0) + iB(t)g_1(t,t), \\ L_0(t)g_1(t,s) &= -iK_\xi(t,s) + 2iB(t)g_2(t,t,s), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{5}$$

Здесь использовано обозначение: $L_0(t) = \dfrac{d}{dt} + A(t)$. Систему (5) можно решить методом последовательных приближений. Полагаем последовательно $g_k = 0, k = 1,2,...$. Пусть $g_1 = 0$. Тогда из первого уравнения системы (5) получим, что $g_0(t) = G_0(t,t_0)$, где $G_0(t,t_0)$ — решение невозмущенной задачи

$$L_0 x(t) = x_0\delta(t-t_0), \tag{6}$$

которое считаем известным. Далее, если положить $g_2 = 0$, то во втором приближении полу чим систему

$$\begin{cases} L_0(t)g_0(t) &= x_0\delta(t-t_0) + iB(t)g_1(t,t), \\ L_0(t)g_1(t,s) &= -iK_\xi(t,s)g_0(t), \end{cases}$$

из которой находим $g_0(t), g_1(t,t)$. Этот процесс можно продолжать.

Если ввести функцию Грина как функцию, удовлетворяющую условиям

$$\frac{dG_0}{dt} + A(t)G_0 = I\delta(t-s), \quad G_0(t,s) = 0 \text{ при } t < s,$$

где I —единичная матрица, то $x(t)$, как решение задачи (6) с правой частью $\delta(t-t_0)$, в соответствии с введенным обозначением функции Грина, является функцией Грина этого уравнения, т.е.

$$x(t) = G_0(t,t_0). \tag{7}$$

С другой стороны, решение невозмущенной системы (6) с помощью функции Грина можно записать следующим образом:

$$x(t) = \int_0^\infty G_0(t,s) f(t) ds. \tag{8}$$

Сравнивая решения задачи (6) в виде (7) и (8), видим, что L_0^{-1} — интегральный оператор с ядром $G_0(t,s)$.

Если обозначить функцию Грина возмущенной задачи (3) через $\hat{G}(t,t_0)$ и заметить, что функция Грина возмущенной задачи — это математическое ожидание $E\{x(t,\cdot)\}$, т.е. $\hat{G}(t,t_0) = E\{x(t,\cdot)\}$, то

$$\hat{G}(t,t_0) = G(t,t_0) + L_0^{-1}\left(\Psi - E\{\xi\}\right)\hat{G}(t,t_0). \tag{9}$$

Следовательно, если известно решение $G(t,t_0)$ невозмущенной задачи (6), то решение возмущенной задачи (3) имеет вид (9). При этом необходимо определить оператор Ψ.

Пример

Пусть матрица $A(t)$ в уравнении (3) — положительно определенная, а $\xi(t,\omega)$ — гауссовский однородный процесс, т.е. процесс, для которого среднее равно нулю $E\{\xi(t,\cdot)\} = 0$, а ковариационная функция имеет вид $E\{\xi(t,\cdot)\xi(s,\cdot)\} = B_\xi(t-s)$.

Тогда функция Грина возмущенной задачи имеет вид, а

$$\overline{\hat{G}}(\alpha) = \frac{\tilde{G}_0(\alpha)}{1 - \tilde{G}_0(\alpha)\tilde{\Psi}(\alpha)},$$

где $\tilde{\hat{G}}(\alpha), \tilde{G}_0(\alpha), \tilde{\Psi}(\alpha)$ — преобразование Фурье функций $\hat{G}(t-s), G_0(t-s), \Psi(t-s)$. При этом функция $\Psi(t-s)$ определяется рядом

$$\Psi = E\{\xi L^{-1}\xi\} + E\{\xi L_0^{-1}\xi L_0^{-1}\xi\} - E\{\xi L_0^{-1}\xi\}L_0^{-1}E\{\xi L_0^{-1}\xi\} + \ldots.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев.: Наукова думка. 1992.
2. Кляцкин В.И., Татарский В.И. Статистические средние в динамических системах // Теоретическая и математическая физика. 1973. Т. 17, № 2. С. 273 — 282.
3. Ковтун И.И. Флуктуации вынужденных колебаний в среде с сопротивлением // Украинский математический журнал. 1993. Т. 45, №1. С. 921—926.
4. Ковтун И.И, Никитина И.А. Об одной попытке создания модели сельскохозяйственной машины // Механизация сельскохозяйственного производства (сборник научных трудов). 2000. Т.VIII. Киев. С. 247—250.
5. Ковтун И.И. Исследование влияния случайного возмущения на устойчивость решения дифференциальных уравнений // Электрификация и автоматизация сельскохозяйственного производства. 2003. №3(4). С. 34—37.
6. Ковтун И.И. Об исследовании систем дифференциальные уравнений со случайными коэффициентами // Проблемы науки, образования и управления (сборник научных трудов). 2004. Вып. VI. Харьков. С. 9—14.

ON THE FINDING A SOLUTION MOMENTS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM PERTURBATIONS OF COEFFICIENTS

Kovtun I. I.

We obtain an operator equation for finding the characteristic functional of a solution of a system with random perturbations of coefficients. We give a method for solving this equation