АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Масина О. Н.

(Россия, Елец)

В работе изучена динамическая система, для которой определено управление, определяющее оптимальный маршрут, и указан неформальный алгоритм решения задачи поражения медленно движущейся цели.

В работе рассматривается задача оптимального управления, в которой перемещение управляемого объекта моделируется в вертикальной плоскости xoy из точки O(0,0) в точку L(l,0) с достижением промежуточной точки H(0,h). Подобные задачи рассматривались в [1], [2], [3], [4], но в данной работе используется система дифференциальных уравнений в контингенциях, что позволяет провести анализ устойчивости номинального движения (это движение определяется критерием оптимальности). Многозначность в правых частях дифференциальных уравнений возникает ввиду сопротивления разреженной среды, которое в первом приближением не учитывается (учитывается только масса m объекта, сила тяги по вертикали и горизонтали и постоянное ускорение свободного падения g).

На первом этапе движение объекта происходит с постоянной векторной тягой (p,q); на втором этапе – с постоянной тягой (-r,s), причем, в отличие от исследований других авторов [1], [2], значения положительных параметров p, q, r, s выбираются из интервалов (p_1,p_2), (q_1,q_2), (r_1, r_2), (s_1,s_2) соответственно.

Движение будет допустимым, если в момент t координаты x, y объекта удовлетворяют условиям: $x(t)$ растет от 0 до l, $y(t)$ возрастает на первом этапе от нуля до высоты h и $y(t)$ убывает до нуля на втором этапе. При этом в момент приземления t_2, то есть когда $y(t_2)=0$, получаем $x(t_2)=l$.

Движение будет *оптимальным*, если на перемещение объекта тратится меньше топлива. В качестве критерия качества берется условие:

$$\forall p\in(p_1, p_2),\ \forall q\in(q_1, q_2),\ \forall r \in (r_1, r_2),\ \forall s \in (s_1, s_2),$$

$$\int_0^{t_1}(p+q)dt+\int_{t_1}^{t_2}(r+s)dt \to \min.$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении параметров p, q, r, s и значений t_1, t_2, чтобы движение объекта из начальной точки в конечную осуществлялось с минимальным расходом топлива.

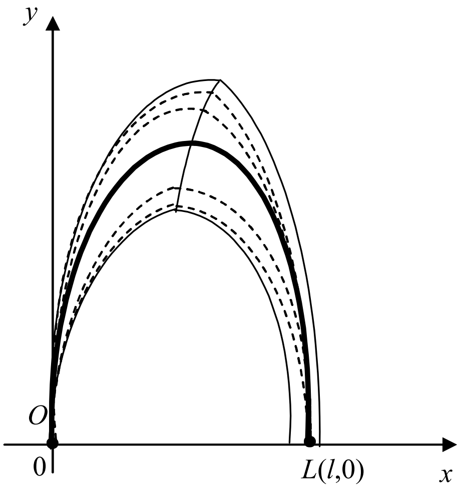

Рис. 1. Графическое изображение траекторий движения объекта

На рис. 1 множество всех решений краевой задачи изображено сплошными тонкими линиями; множество всех допустимых решений – штриховыми линиями, а жирным выделено оптимальное движение. Все решения будут устойчивыми, так как они определены на компактном множестве – временном отрезке $[0,t_2]$.

Предлагается следующий алгоритм решения задачи. Первым шагом является нахождение параметров p, q, r и s. Выберем сначала однозначную реализацию, состоящую из единственных значений этих параметров. Тогда дифференциальные включения

$$\begin{cases} mx'' \in p, \\ my'' \in q - mg \end{cases} \text{ и } \begin{cases} mx'' \in -r, \\ my'' \in -(s + mg) \end{cases},$$

описывающие движения объекта на первом и втором этапах, превратятся в системы простейших дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными правыми частями:

$$\begin{cases} mx'' = p, \\ my'' = q - mg \end{cases} \text{ и } \begin{cases} mx'' = -r, \\ my'' = s - mg \end{cases}.$$

Для упрощения выкладок проведем замену: P_1:=p/m, Q_1:=$(q$-$mg)/m$, r_1:=R/m и S_1:=$(s$-$mg)/m$. Тогда движение объекта на первом этапе $0 \le t \le t_1$ будет описываться системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} x'' = P_1, \\ y'' = Q_1, \end{cases} \tag{1}$$

с условиями $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$, $y(t_1)=h$.

На втором этапе $t_1 \le t \le t_2$ движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка с соответствующими начальными условиями в точке $t=t_1$:

$$\begin{cases} x'' = -R_1,\ x(t_1) = \dfrac{P_1 t_1^{\ 2}}{2},\ \ x'(t_1) = P_1 t_1, \\ y'' = -S_1, y(t_1) = \dfrac{Q_1 t_1^{\ 2}}{2} = h, y'(t_1) = Q_1 t_1, t_1 \le t \le t_2. \end{cases} \tag{2}$$

Решая (1) и (2) и полагая $\tau = t_2/t_1$, получим систему:

$$\begin{cases} P_1(2\tau-1) - R_1(\tau-1)^2 = \dfrac{2l}{t_1^{\,2}}, \\ P_1 = R_1(\tau-1), \\ -S_1(\tau-1)^2 + Q_1(2\tau-1) = 0, \\ Q_1 = \dfrac{2h}{t_1^{\,2}}, \end{cases} \tag{3}$$

Для нахождения решения этой системы воспользуемся функцией Solve математического пакета Mathematica 4.1:

```
Solve[{P*(2*τ-1)-R*(τ-1)^2 == 2*l/(t1^2), P == R*(τ-1), Q == 2*h/(t1^2),
  -S*(τ-1)^2+Q*(2*τ-1) == 0}, {P, Q, R, S}]
```

$$\left\{\left\{S \to \frac{2h(-1+2\tau)}{(-1+\tau)^2 t_1^2},\ Q \to \frac{2h}{t_1^2},\ P \to \frac{2l}{\tau t_1^2},\ R \to \frac{2l}{(-\tau+\tau^2)\, t_1^2}\right\}\right\}$$

Таким образом, решение системы (3) имеет вид:

$$P_1 = \frac{2l}{t_1^{\,2}\tau},\ R_1 = \frac{2l}{t_1^{\,2}\tau(\tau-1)},\ S_1 = \frac{2(2\tau-1)h}{t_1^{\,2}(\tau-1)^2}, Q_1 = \frac{2h}{t_1^{\,2}}.$$

Для вычисления параметров τ и t_1 воспользуемся условием оптимальности, где $F(t_1,\tau) = m\left(\dfrac{4l}{t_1\tau} + \dfrac{6h}{t_1} + \dfrac{2h}{t_1(\tau-1)} + g\,t_1\tau\right)$.

Перепишем систему (3) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{4l}{\tau} + 6h - t_1^{\,2}\tau g + \dfrac{2h}{\tau-1} = 0, \\ \dfrac{4l}{\tau} - t_1^{\,2}\tau g + \dfrac{2h\tau}{(\tau-1)^2} = 0, \end{cases}$$

откуда получим: $\tau = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $t_1 = +\sqrt{\dfrac{4l(\tau-1)^2 + 2h\tau^2}{\tau^2(\tau-1)^2 g}}$. Тогда

$t_2=\tau\sqrt{\dfrac{4l(\tau-1)^2+2h\tau^2}{\tau^2(\tau-1)^2 g}}$; $p=\dfrac{2l\tau(\tau-1)^2 gm}{4l(\tau-1)^2+2h\tau^2}$; $q=\dfrac{2h\tau^2(\tau-1)^2 gm}{4l(\tau-1)^2+2h\tau^2}+mg$;

$r=\dfrac{2l\tau(\tau-1)gm}{4l(\tau-1)^2+2h\tau^2}$; $s=\dfrac{2h\tau^2(2\tau-1)gm}{4l(\tau-1)^2+2h\tau^2}+mg$.

При постоянных параметрах соответствующие вычисления были проведены в системе компьютерной математики Mathematica 4.1.

In[33]:= $P := \dfrac{2*l*g*\tau*(\tau-1)^2*m}{4*l*(\tau-1)^2+2*h*\tau^2}$

In[34]:= $P\ /.\ \left\{l\to 10,\ h\to 5,\ \tau\to 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ g\to 1,\ m\to 15\right\}\ //\ N$

Out[34]= 4.12771

In[35]:= $Q := \dfrac{2*h*g*\tau\hat{}2*(\tau-1)\hat{}2*m}{4*l*(\tau-1)^2+2*h*\tau^2}+m*g$

In[36]:= $Q\ /.\ \left\{l\to 10,\ h\to 5,\ \tau\to 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ g\to 1,\ m\to 15\right\}\ //\ N$

Out[36]= 18.2554

In[37]:= $R := \dfrac{2*l*g*\tau*(\tau-1)*m}{4*l*(\tau-1)^2+2*h*\tau^2}$

In[38]:= $R\ /.\ \left\{l\to 10,\ h\to 5,\ \tau\to 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ g\to 1,\ m\to 15\right\}\ //\ N$

Out[38]= 7.14941

In[39]:= $S := \dfrac{2*h*g*\tau\hat{}2*(2*\tau-1)*m}{4*l*(\tau-1)^2+2*h*\tau^2}+m*g$

In[40]:= $S\ /.\ \left\{l\to 10,\ h\to 5,\ \tau\to 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ g\to 1,\ m\to 15\right\}\ //\ N$

Out[40]= 36.0434

Полученные результаты демонстрируют прямолинейную зависимость силы тяги от величин h, l и массы объекта.

Так как параметры p, q, r, s многозначные и выбираются из соответствующих интервалов (p_1,p_2), (q_1,q_2), (r_1, r_2), (s_1,s_2), то будет отклонение от оптимального движения. Поэтому последним этапом в решении задачи является коррекция движения с помощью датчиков для возвращения на оптимальный маршрут.

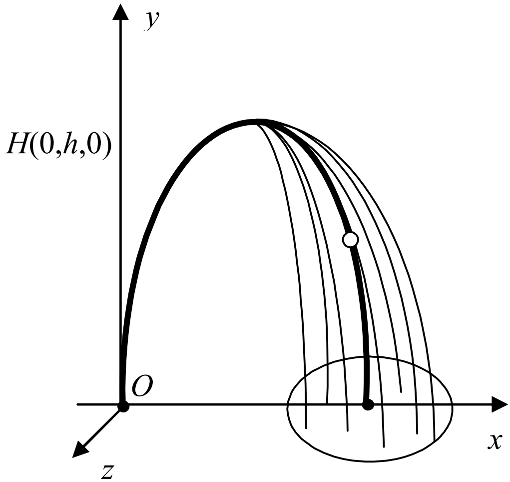

Рис. 2. Графическое изображение возможных траекторий движения объекта на первом шаге

Рассмотренную задачу можно использовать для решения более сложной задачи, в которой перемещаемому объекту необходимо поразить движущуюся цель, перемещающуюся в плоскости xoz со скоростью v в произвольном направлении. Этой целью может быть хищник, а в качестве объекта можно рассматривать мини ракету с радиусом поражения r. На рисунках 2 и 3 зона поражения изображается черным кругом, а множество возможных положений цели до встречи с объектом выделяется кругом с текущим радиусом R.

Предлагается следующий алгоритм решения поставленной задачи.

Шаг 1. На первом этапе движение объекта происходит из точки O(0,0,0) с постоянным ускорением вверх и вперед до точки

H(0,h,0), как и в первой задаче. За время движения t_1 цель перемещается в точку круга (круга положений), указанного на рисунке 2.

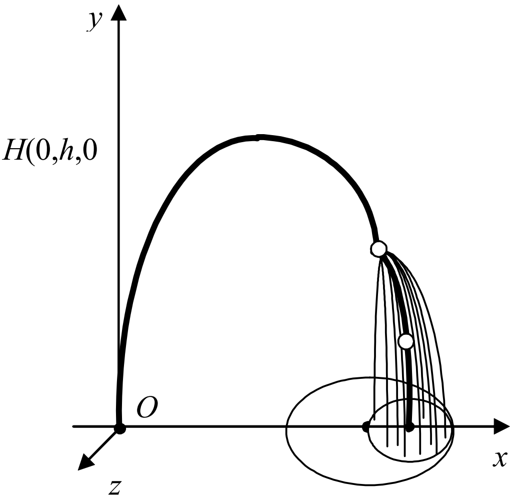

Рис. 3. Графическое изображение возможных траекторий движения объекта на втором шаге

Шаг 2. Из всех возможных траекторий движения объекта выбираем ту, которая ведет в точку нахождения цели. За оставшееся время $t = t_2-t_1$, как и в первой задаче, объект достигнет плоскости xoz, направляясь в центр круга положений. Движение по этой траектории будем проводить за время t/2, при этом устанавливаем новый круг положений, показанный на рисунке 3, в котором окажется цель. Выбираем ту траекторию, которая ведет в центр круга положений. Если радиус этого круга не больше радиуса поражения r, то оставшееся время t/2 тратим на движение в центр этого круга с поражением цели.

Шаг 3. Если же радиус круга больше радиуса поражения, то повторяем шаг 2, где время движения, за которое объект проходит половину маршрута в центр круга положений, уменьшается вдвое.

Если радиус этого круга не больше радиуса поражения r, то оставшееся время t/4 тратим на движение в центр этого круга с поражением цели. Если это не так, то повторяем второй шаг с уменьшенным вдвое временем и так далее.

Так как каждый раз время движения уменьшается вдвое на каждом шаге, то и круг положений каждый раз уменьшается в два раза, и поэтому через несколько повторений шага 2 мы получим круг положений с радиусом меньше r, что позволяет далее двигаться в центр круга положений с гарантированным уничтожением цели.

Данный алгоритм может быть реализован в виде компьютерной программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высш. шк., 2001. – 239 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – Наука, 1977. – 624 с.
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкремидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961. – 342 с.
5. Меренков Ю.Н., Масина О.Н. Анализ оптимального управления транспортной системы // Вестник ЕГУ им. И.А.Бунина. Вып. 5: Серия «Математика. Компьютерная математика». – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2005.– С.65-70.

THE ANALYSIS OF CONTROLLABILITY OF DYNAMIC SYSTEM

Masina O. N.

(Russia, Eletsk)

In this work the dynamic system is investigated, for which the control determining an optimum route is determined, and the informal algorithm of the solution of a problem of a defeat of the slowly driven target is indicated.