МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Мокин А. Ю.

Методом разделения переменных решена одномерная задача параболического типа с нелокальными краевыми условиями, содержащими вещественный параметр. Рассмотренные краевые условия не являются усиленно регулярными ни при каком значении параметра. Система собственных функций оператора второй производной, подчинённого краевым условиям исходной задачи, не обладает свойством базисности. Априорные оценки решения, полученные в работе, означают устойчивость решения по начальным данным

Введение. В работе для начально-краевой задачи параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t > 0, \quad U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(1,t) + \alpha U(1,t), \quad t > 0 \tag{2}$$

изучается проблема существования и единственности решения по начальным данным.

Задача (1),(2) понимается в классическом смысле. Параметр α – любое положительное вещественное число. При $\alpha = 0$ краевые условия (2) принимают вид:

$$U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(1,t), \quad t > 0. \tag{3}$$

Задача (1),(3), известная в литературе как задача Самарского–Ионкина, рассмотрена в работе [1]. Автором работы доказана корректность постановки, то есть существование решения, его единственность и устойчивость по начальным данным.

Задачи параболического типа с двухточечными краевыми условиями общего вида

$$\begin{aligned} &a_1 U_x(0,t) + b_1 U_x(1,t) + a_0 U(0,t) + b_0 U(1,t) = 0, \\ &c_1 U_x(0,t) + d_1 U_x(1,t) + c_0 U(0,t) + d_0 U(1,t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

изучались ранее в работе [2] . В предположении усиленной регулярности условий (4) методом разделения переменных построено решение задачи (1),(4), доказана единственность решения и его устойчивость по начальным данным в различных нормах.

Особенность задачи (1),(2) заключается в том, что краевые условия (2) не являются усиленно регулярными ни при каком значении $\alpha \ge 0$.

1. Существование и единственность решения.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L, определённого равенством

$$Lu(x) = -u''(x), 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u'(0) = u'(1) + \alpha u(1). \tag{5}$$

При любом положительном α все собственные значения этого оператора вещественные и положительные. Их удобно распределить на две серии, которые имеют вид

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2,\ k = 1,2,\ldots,\quad \lambda_k^{(2)} = (2y_k)^2,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

где $y_k,\ k = 0,1,2,\ldots$ – корни уравнения

$$tg\ y = 0.5\alpha/y,\quad y > 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Задача (7) при любом положительном α имеет счётное число решений, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < y_0 < \pi/2,\quad \pi k < y_k < \pi k + \pi/2,\ k = 1,2,\ldots,$$

причём для разности $\delta_k = y_k - \pi k$ при достаточно больших k выполняются двусторонние оценки

$$\frac{\alpha}{2\pi k}\left(1 - \frac{1}{2\pi k}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2\pi k}\left(1 + \frac{1}{2\pi k}\right). \tag{8}$$

Каждому собственному значению оператора L отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция. Используя нумерацию, введённую равенствами (6), совокупность собственных функций можно представить в виде

$$v_k^{(1)}(x) = \sin 2\pi k x,\ k = 1,2,\ldots,\quad v_k^{(2)}(x) = \sin 2y_k x,\ k = 0,1,2,\ldots \tag{9}$$

Система функций (9) является почти нормированной, полной и линейно независимой в пространстве $L_2[0,1]$. Последнее вытекает из существования биортогональной системы, состоящей из собственных функций оператора L^*, сопряжённого к L в смысле скалярного произведения пространства $L_2[0,1]$.

Оператор L^* определяется равенством

$$L^* w(x) = -w''(x),\ 0 < x < 1,\quad w(0) = w(1),\ w'(1) + \alpha w(1) = 0. \tag{10}$$

Он обладает теми же собственными значениями (6) , что и оператор L. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$w_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)}\cos(2\pi k x + \psi_k),\ k = 1,2,\ldots,\ w_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)}\cos\big(y_k(1-2x)\big),\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

где $\psi_k = arctg\left(\alpha/2\pi k\right),\ k = 1,2,\ldots,$ множитель y_k определяется из уравнения (7).

Системы собственных функций операторов L и L^* занумерованы таким образом, что $\left(v_m^{(i)}, w_n^{(j)}\right) \neq 0 \Leftrightarrow m = n, i = j$. Выберем константы $C_k^{(i)}$ так, чтобы $\left(v_n^{(j)}, w_n^{(j)}\right) = 1$.

При построении решения задачи (1),(2) методом разделения переменных принципиальное значение имеет базисность системы собственных функций (9) оператора L. Здесь и далее под термином «базис» мы будем понимать базис Рисса пространства $L_2[0,1]$ (см.[3]).

Теорема 1. *Система функций (9) не является базисом пространства $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что всякий базис Рисса является почти нормированной системой (см.[3]). Предположим, что система функций (9) является базисом Рисса пространства $L_2[0,1]$. Тогда биортонормированная система функций (11) также является базисом Рисса. Не приводя явный вид нормировочных констант $C_k^{(i)}$ докажем, что система (9) не является почти нормированной.

В силу биортонормированности систем (9), (11) справедливы равенства

$$\left(v_k^{(1)}, w_k^{(1)}\right) = 1, \quad (v_k^{(2)}, w_k^{(1)}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что $\left(v_k^{(2)} - v_k^{(1)}, w_k^{(1)}\right) = -1$. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получим оценку снизу: $\left\|w_k^{(1)}\right\| \geq \left(\left\|v_k^{(2)} - v_k^{(1)}\right\|\right)^{-1}$. Разность $v_k^{(2)} - v_k^{(1)}$ удовлетворяет соотношениям

$$\left\|v_k^{(2)} - v_k^{(1)}\right\| = \left\|2\sin\delta_k x \cos(2\pi kx + \delta_k x)\right\| \leq 2\delta_k,\ k = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из неравенств (8) следует, что $\left\|w_k^{(1)}\right\| \geq k/\alpha$ для достаточно больших номеров k. Аналогично доказывается, что $\left\|w_k^{(2)}\right\| \geq k/\alpha$.

Т.о. биортонормированная система (11) по норме пространства $L_2[0,1]$ является бесконечно большой и, следовательно, не образует базис Рисса, равно как и система функций (9). Теорема доказана.

Рассмотрим вспомогательную систему функций

$$v_0(x) = v_0^{(2)}(x)/(2y_0),\ v_{2k}(x) = v_k^{(1)}(x),\ v_{2k-1}(x) = \left(v_k^{(2)}(x) - v_k^{(1)}(x)\right)\left(2\delta_k\right)^{-1},\ k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Биортонормированная к ней система функций существует и имеет вид

$$w_0(x) = 2y_0 w_0^{(2)}(x),\ w_{2k}(x) = w_k^{(2)}(x) + w_k^{(1)}(x),\ w_{2k-1}(x) = 2\delta_k w_k^{(2)}(x),\ k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Функции систем (12),(13) занумерованы таким образом, что $(v_i, w_j) = \delta_{i,j},\ i, j = 0, 1, 2, \dots$

Докажем базисность системы функций (12). Для этого рассмотрим совокупность собственных и присоединённых функций оператора L при $\alpha = 0$. Известно (см.[1]), что оператор L при $\alpha = 0$ обладает собственными значениями $\lambda_k = \left(2\pi k\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Каждому собственному значению с номером k отвечает единственная собственная функция

$$u_0(x) = x, \quad u_{2k} = \sin 2\pi kx,\ k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Каждому положительному собственному значению с номером k отвечает также одна присоединённая функция

$$u_{2k-1}(x) = x\cos 2\pi kx,\ k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Совокупность функций $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$, определённых равенствами (14),(15), образует базис Рисса пространства $L_2[0,1]$ (см. [1]).

Теорема 2. *Система функций* $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$*, определённая равенствами (12), образует базис Рисса пространства* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Воспользуемся признаком базисности Н.К.Бари (см. [3]), в котором утверждается, что всякая линейно независимая система функций, квадратично близкая к базису Рисса, сама является базисом Рисса.

Линейная независимость системы (12) вытекает из существования биортонормированной к ней системы (13). Докажем квадратичную близость функций $v_k(x)$ и $u_k(x)$, $k = 0,1,2,\ldots$, определённых равенствами (12) и (14),(15) соответственно.

Условие квадратичной близости означает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| v_k(x) - u_k(x) \right\|^2 \tag{16}$$

является сходящимся. Рассмотрим разность $s_k = v_k(x) - u_k(x), k = 1,2,\ldots$ Нетрудно видеть, что $s_{2k}(x) = 0, 0 \le x \le 1, k = 1,2,\ldots$ Пользуясь равенствами (9), представим функцию $v_{2k-1}(x)$ в виде $v_{2k-1}(x) = \left(\sin \delta_k x / (\delta_k x)\right) x \cos\left(2\pi k x + \delta_k x\right), k = 1,2,\ldots$ Отсюда и из леммы 1 вытекает неравенство $\left| v_{2k-1}(x) - u_{2k-1}(x) \right| \le C/k, \quad 0 \le x \le 1,$ с константой $C > 0$, не зависящей от k, справедливое при достаточно больших k.

Из последнего неравенства следует оценка $\left\| s_{2k-1} \right\|^2 \le C^2 / k^2$, которая позволяет утверждать сходимость ряда (16), то есть квадратичную близость системы (12) и базиса $\{u_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая функция* $f(x) \in L_2[0,1]$ *может быть разложена, и при том единственным образом, в сходящийся к ней в метрике пространства* $L_2[0,1]$ *ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k v_k(x), \quad f_k = \left(f, w_k\right), k = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

Следствие 2. *Коэффициенты разложения любой функции* $f(x) \in L_2[0,1]$ *в ряд (17) суммируемы с квадратом, причём существуют константы* $M_1, M_2 > 0$*, не зависящие от выбора* $f(x)$*, такие, что*

$$M_1 \|f\|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \left| f_k \right|^2 \le M_2 \|f\|^2 \tag{18}$$

Следствие 3. *Система функций (13), биортонормированная к базису (12), также образует базис Рисса пространства* $L_2[0,1]$.

Приступим к непосредственному доказательству существования и единственности решения задачи (1),(2). Предположим, что функция $U_\alpha(x,t)$ является классическим решением задачи (1),(2) при некотором $\alpha > 0$. При каждом фиксированном $t \ge 0$ функция $U_\alpha(x,t)$ принадлежит пространству $L_2[0,1]$ и, согласно следствию 1 из теоремы 2, может быть разложена в ряд

$$U_\alpha(x,t)=T_0(t)v_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_{2k}(t)v_{2k}(x)+T_{2k-1}(t)v_{2k-1}(x)\right], \tag{19}$$

причём

$$T_j(t)=\left(U_\alpha(x,t),w_j(x)\right),\ j=0,1,2,\ldots,\quad t\ge 0. \tag{20}$$

Так как $U_\alpha(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1$, то $T_j(0)=\left(\varphi,w_j\right),\ j=0,1,2,\ldots$

Продифференцировав равенство (20) по t, получим

$$T_j'(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}U_\alpha(x,t),w_j(x)\right)$$

Дифференциальное уравнение задачи (1),(2) позволяет преобразовать последнее равенство к виду

$$T_j'(t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_\alpha(x,t),w_j(x)\right)=-\left(LU_\alpha(x,t),w_j(x)\right).$$

Так как функции $U_\alpha(x,t)$ и $w_j(x)$ удовлетворяют сопряжённым краевым условиям (5),(10) соответственно, то действие оператора L можно перенести на второй множитель скалярного произведения, то есть

$$T_j'(t)=-\left(U_\alpha(x,t),-w_j''(x)\right),\quad j=0,1,2,\ldots \tag{21}$$

Пусть $j=2k-1,\ k=1,2,\ldots$, тогда $T_{2k-1}'(t)=-\lambda_k^{(2)}\left(U_\alpha(x,t),w_{2k-1}(x)\right)$. В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$T_{2k-1}'+\lambda_k^{(2)}T_{2k-1}(t)=0,\quad t>0.$$

Непрерывность функции $T_{2k-1}(t)$ в нуле позволяет добавить начальное условие $T_{2k-1}(0)=\varphi_{2k-1}=\left(\varphi,w_{2k-1}\right)$, которое выделяет единственное решение данного уравнения

$$T_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\exp\left(-\lambda_k^{(2)}t\right),\quad t\ge 0. \tag{22}$$

Пусть $j=2k,\ k=1,2,\ldots$ в равенстве (21). Из равенств (13) следует, что

$$-w_{2k}''(x)=\lambda_k^{(1)}w_{2k}(x)+\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}\right)\left(2\delta_k\right)^{-1}w_{2k-1}(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{23}$$

Поэтому коэффициент $T_{2k}(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$T_{2k}'(t)+\lambda_k^{(1)}T_{2k}(t)=-\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}\right)\left(2\delta_k\right)^{-1}T_{2k-1}(t),\ t>0,\quad T_{2k}(0)=\varphi_{2k}=\left(\varphi,w_{2k}\right),$$

которая имеет единственное решение

$$T_{2k}(t)=\varphi_{2k}\exp\left(-\lambda_k^{(1)}t\right)-\varphi_{2k-1}\left[\exp\left(-\lambda_k^{(1)}t\right)-\exp\left(-\lambda_k^{(2)}t\right)\right]\left(2\delta_k\right)^{-1},\ k=1,2,\ldots \tag{24}$$

Аналогичным образом доказывается равенство

$$T_0(t)=\varphi_0\exp\left(-\lambda_0^{(2)}t\right), \varphi_0=\left(\varphi,w_0\right). \tag{25}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если при некотором $\alpha>0$ существует решение задачи (1),(2), то оно представимо в виде ряда (19), где коэффициенты $T_j(t),\ j=0,1,2,\ldots$ определяются равенствами (22),(24),(25).*

Следствие 1. *Если задача (1),(2) имеет решение, то оно единственно.*

Теорема 3 позволяет свести доказательство существования решения задачи (1),(2) к исследованию сходимости ряда (19), что целиком и полностью определяется скоростью стремления к нулю коэффициентов $\varphi_k,\ k=0,1,2,\ldots$ разложения функции $\varphi(x)$ по базису (12).

Теорема 4. *Если ряд, составленный из коэффициентов разложения функции $\varphi(x)$ по системе (12) сходится абсолютно, то задача (1),(2) имеет классическое решение.*

Доказательство. Достаточно проверить, что в сформулированных предположениях на функцию $\varphi(x)$ ряд (19) удовлетворяет всем требованиям задачи (1),(2).

Покажем непрерывность функции $U_\alpha(x,t)$, определённой равенством (19), при $0\le x\le 1, t\ge 0$. Для этого воспользуемся признаком равномерной сходимости Вейерштрасса. Заметим, что

$$\left|T_j(t)v_j(x)\right|\le C_1\left|\varphi_j\right|, 0\le x\le 1, t\ge 0 \tag{26}$$

для нечётных номеров j, причём константа C_1 не зависит от j.

Коэффициент $T_{2k}(t)$ можно представить в виде

$$T_{2k}(t)=\left[\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1}\left(1-\exp\left(\lambda_k^{(1)}-\lambda_k^{(2)}\right)t\ \right)\left(2\delta_k\right)^{-1}\right]\exp\left(-\lambda_k^{(1)}t\right)$$

Отсюда, пользуясь равенствами (6) и леммой 1, нетрудно доказать, что неравенство (26) справедливо и для чётных индексов j.

Следовательно, ряд (19), лишённый слагаемого с нулевым номером, которое не влияет на сходимость, мажорируется рядом $C_1\left(\left|\varphi_1\right|+\left|\varphi_2\right|+\ldots+\left|\varphi_n\right|+\ldots\right)$. Сходимость данного ряда и непрерывность слагаемых ряда (19) позволяют утверждать непрерывность функции $U_\alpha(x,t)$ на множестве $0\le x\le 1, t\ge 0$.

Доказательство существования производных

$$\frac{\partial}{\partial t}U_\alpha(x,t),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_\alpha(x,t),\quad 0<x<1, t>0$$

и их равенство, а также справедливость соотношений (2) проверяются по аналогии со случаем задачи теплопроводности с краевыми условиями первого рода (см.[4]). Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия абсолютной сходимости ряда, составленного из коэффициентов разложения функции $\varphi(x)$ по системе (12).

Теорема 5. *Если функция* $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ *и удовлетворяет граничным условиям* $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=\varphi'(1)+\alpha\varphi(1)$, *то ряд* $S=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n+\ldots$ *сходится абсолютно.*

Доказательство. Для коэффициентов φ_j с нечётными индексами $j=2k-1, k=1,2,\ldots$ справедливы равенства

$$\varphi_{2k-1}=\left(\varphi, w_{2k-1}\right)=\left(\lambda_k^{(2)}\right)^{-1}\left(\varphi,-w''_{2k-1}\right)=\left(\lambda_k^{(2)}\right)^{-1}\left(-\varphi'', w_{2k-1}\right),$$

из которых вытекает оценка $|\varphi_{2k-1}| \le C_1/k^2$ с константой C_1, не зависящей от k.

Пользуясь равенством (23), для коэффициентов с нечётными индексами получим

$$\varphi_{2k}=\left(\varphi, w_{2k}\right)=\left(\lambda_k^{(1)}\right)^{-1}\left[\left(\varphi,-w''_{2k}\right)-\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}\right)\left(2\delta_k\right)^{-1}\left(\varphi, w_{2k-1}\right)\right],$$

то есть

$$\varphi_{2k}=\left(\lambda_k^{(1)}\right)^{-1}\left[\left(-\varphi'', w_{2k}\right)-\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}\right)\left(2\delta_k\right)^{-1}\varphi_{2k-1}\right].$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает существование константы $C_2>0$, не зависящей от k, такой, что $|\varphi_{2k}| \le C_2/k^2$.

Оценки, построенные для коэффициентов φ_j, $j=1,2,\ldots$ позволяют утверждать сходимость ряда S. Теорема доказана.

2. Устойчивость решения.

Определение 1. *Задача (1),(2) называется равномерно устойчивой по начальным данным в норме* $\|\bullet\|_*$, *если для любого решения* $U_\alpha(x,t)$ *задачи (1),(2) функция*

$$p(t)=\|U_\alpha(x,t)\|_*, \quad t \ge 0$$

является не возрастающей на своей области определения.

Определим норму $\|\bullet\|_*$ во множестве функций, интегрируемых с квадратом по [0,1], в которой будем изучать равномерную устойчивость по начальным данным задачи (1),(2). Рассмотрим любую $f \in L_2[0,1]$. Пусть $f_k, k=0,1,2,\ldots$ – её коэффициенты разложения системе (12). Положим по определению

$$\|f\|_*=\left[\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|^2\right]^{1/2}. \tag{27}$$

Свойства коэффициентов разложения по базису Рисса (см. [3]) позволяют проверить справедливость всех аксиом нормы для выражения (27).

Если функция $U_\alpha(x,t)$ является решением задачи (1),(2), то, согласно теореме 3, она представима в виде ряда (19). Поэтому для функции $p^2(t)$ справедливо равенство

$$p^2(t)=T_0^2(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_{2k}^2(t)+T_{2k-1}^2(t)\right], \quad t \ge 0, \tag{28}$$

где $T_j(t)$ определены согласно (22),(24),(25).

Нетрудно видеть, что слагаемое $T_0^2(t)$ не возрастает при $t \geq 0$. Докажем, что сумма $p_k(t) = T_{2k}^2(t) + T_{2k-1}^2(t)$ также является не возрастающей на множестве $t \geq 0$ при каждом $k = 1, 2, \ldots$

Производная функции $p_k(t)$ в результате элементарных преобразований может быть представлена в виде

$$p_k'(t) = -\left(A_k r_k, r_k\right)_{E^2}, \quad r_k = (\varphi_{2k}, \varphi_{2k-1}) \in E^2, \quad A_k = \left(a_{i,j}(t)\right) \in R^{2\times 2}, a_{12}(t) = a_{21}(t),$$

$$a_{11}(t) = 2\lambda_k^{(1)} \exp\left(-2\lambda_k^{(1)} t\right), \quad a_{12}(t) = \left[-a_{11}(t) + \left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\right)\exp\left(-\left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\right)t\right)\right]\left(2\delta_k\right)^{-1},$$

$$a_{22}(t) = \left[\lambda_k^{(2)}\left(1 + 4\delta_k^2\right)\exp\left(-2\lambda_k^{(2)} t\right) + 0.5a_{11}(t) - \left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\right)\exp\left(-\left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\right)t\right)\right]\left(2\delta_k^2\right)^{-1}.$$

Квадратичная форма $\left(A_k r, r\right)_{E^2}$ является положительно определённой при каждом $k = 1, 2, \ldots$ на множестве $t > 0$. Доказательство этого факта проведём с помощью критерия Сильвестра. Действительно, угловой минор первого порядка матрицы A_k положителен. Угловой минор второго порядка может быть преобразован к виду

$$\det A_k = 4\exp\left(-2\left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\right)t\right)\left(\lambda_k^{(1)}\lambda_k^2 - \left(2\pi k + \delta_k\right)^2\right).$$

Учитывая здесь, что $\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2, \lambda_k^{(2)} = (2\pi k + 2\delta_k)^2, \delta_k > 0, k = 1, 2, \ldots$, получим неравенство $\det A_k > 0, t > 0, k = 1, 2, \ldots$

Положительная определённость квадратичной формы $\left(A_k r, r\right)_{E^2}$ означает, что функция $p_k(t)$ не возрастает на множестве $t \geq 0$ для любых значений $\varphi_{2k}, \varphi_{2k-1} \in R$ и при каждом $k = 1, 2, \ldots$

Ряд (28) равномерно сходится на множестве $t \geq 0$, т.к. мажорируется на этом множестве сходящимся числовым рядом $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2 + \ldots$ Отсюда и из монотонности слагаемых ряда (28) вытекает монотонность функции $p^2(t)$ и функции $p(t)$.

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 6. *Задача (1),(2) является равномерно устойчивой по начальным данным в норме* $\| \bullet \|_*$, *определённой равенством (27).*

Следствие 1. *Всякое решение* $U_\alpha(x,t)$ *задачи (1),(2) удовлетворяет неравенству*

$$\left\| U_\alpha(x,t)\right\|_{L_2[0,1]} \leq C_\alpha \left\|\varphi(x)\right\|_{L_2[0,1]}, \quad t \geq 0$$

с константой $C_\alpha > 0$, *зависящей только от выбора* $\alpha > 0$.

Справедливость последнего утверждения вытекает из теоремы 6 и из соотношений (18).

Работа выполнена в рамках Научной Школы академика РАН Моисеева Е.И. (НШ-2726.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т 13, №2. С.294–304.
2. *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №7. С. 1284–1295.
3. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. // Учёные записки МГУ. 1951. Выпуск 148, №4. С. 69–107.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Москва: Изд-во «Наука», 1977. 735 с.

ON THE SEPARATION OF VARIABLES FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH NONLOCAL BOUNDARY RELATIONS

Mokin A. Ju.

A boundary value problem for partial differential equation with nonlocal boundary relations of special type is resolved by means of a slight modification of the separation of variables method. Ordinal differential operator of the second order subject to boundary conditions of the main problem is not self-adjoint. The system of eigenfunctions generated by the operator has no basis property in $L_2[0,1]$ *space. A special system of functions is proposed to expand the solution of the boundary value problem*