НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ВЕРШИНАХ ПОЛИТОПОВ РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ

Шлык В. А.

В статье рассматриваются вершины политопов разбиений чисел, основное внимание уделяется проблеме их распознавания. Приведены достаточные условия для того, чтобы заданное разбиение являлось вершиной политопа, и критерий представления разбиения в виде выпуклой комбинации двух других разбиений. Показано, что все вершины политопа разбиений можно рекурсивно построить при помощи двух комбинаторных операций из намного меньшего подмножества опорных вершин

Введение. Задача о разбиении чисел на слагаемые является одной из классических в математике. Она привлекала внимание многих известных математиков, начиная с Эйлера [6]. Резкий подъем интереса к задаче вызвали исследования Харди, Литлвуда и Рамануджана [3]. Новое оживление связано с развитием в последние десятилетия техники таблиц Юнга [1, 2]. Разбиения служили источником новых проблем и методов в теории чисел, комбинаторике, теории представлений [2]. Язык таблиц оказался удобным для исследования задач статистической механики [7]. В последнее время физики занимаются разбиениями чисел не менее активно, чем математики.

К настоящему времени получено множество результатов о числе разбиений различных видов и соотношений алгебраического и комбинаторного характера. Автором предложен новый, полиэдральный подход к задаче о разбиениях чисел [4, 10]. Его идея заключается в том, что множество разбиений числа рассматривается как политоп (ограниченный выпуклый многогранник). Переход от множества к многограннику вносит геометрию в арифметику разбиений и приводит к новым задачам описания геометрических свойств разбиений и полиэдральных характеристик образуемого ими политопа. В настоящей работе представлены результаты исследования вершин политопа разбиений чисел. Особое внимание уделено проблеме распознавания вершин. Это объясняется двумя причинами: 1) все разбиения выражаются через вершины политопа, 2) именно вершины являются оптимальными решениями линейных экстремальных задач на разбиениях.

Раздел 1 содержит основные понятия, обозначения и общие результаты о политопах разбиений. В разделе 2 говорится о том, как вершины политопа разбиений числа n связаны с вершинами политопов разбиений меньших чисел. Раздел 3 посвящен непосредственно проблеме распознавания вершин. В нем приведены достаточные условия для того, чтобы заданное разбиение было вершиной, и критерий представления разбиения в виде выпуклой комбинации двух разбиений этого же числа. Из критерия вытекают необходимые условия для вершин. Обсуждается связь вершин политопов разбиений с известными в аддитивной теории чисел множествами Сидона. В разделе 4 вводятся две комбинаторные операции укрупнения частей разбиения, с помощью которых из одних вершин политопа можно строить новые вершины. Вводится понятие опорной вершины и приводятся первоначальные данные о числе опорных вершин. В заключительном разделе подводятся итоги работы и формулируются открытые вопросы.

1. Основные понятия, обозначения и общие результаты. Разбиением положительного целого числа n называется его представление в виде суммы положительных целых чисел $n = i_1 + i_2 + ... + i_k$, $1 \le i_1, i_2, ..., i_k \le n$, без учета их порядка. Слагаемые $i_1, i_2, ..., i_k$ называются частями разбиения. При полиэдральном подходе каждое разбиение числа n отождествляется с неотрицательной точкой $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$, компоненты x_i, $1 \le i \le n$, которой равны, соответственно, числам вхождений слагаемых i в разбиение. Так, разбиению $8 = 1+1+2+4$ соответствует точка $x = (2,1,0,1,0,0,0,0) \in \mathbb{Z}^8$. Пусть $T_n = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n, x_i \in \mathbb{Z}, x_i \ge 0, i = 1, \dots, n \right\}$ есть множество всех разбиений числа n. Тогда политоп $P_n \subset \mathbb{R}^n$ разбиений числа n определяется как выпуклая оболочка всех $x \in T_n$, то есть $P_n = \text{conv.hull}\, T_n$.

Рассмотрим политопы разбиений небольших n. Политоп P_1 состоит из единственной точки $x_1 = 1$. Два разбиения $2 = 1+1$ и $2 = 2$ числа 2 порождают политоп P_2 – отрезок, соединяющий точки $(2,0)$ и $(0,1)$ в $\mathbb{R}^2$. Множество T_3 содержит три точки $(3,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(0,0,1)$. Следовательно, политоп P_3 является треугольником с вершинами в этих точках. Заметим, что до сих пор все разбиения являлись вершинами соответствующих политопов. При $n = 4$ ситуация меняется. Политоп P_4 есть выпуклая оболочка пяти точек $(4,0,0,0)$, $(2,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,2,0,0)$ и $(0,0,0,1)$ из $\mathbb{R}^4$. Он показан на Рис. 1, где подразумевается, что точка $(0,0,0,1)$ находится на четвертой оси. Как видим, точка $(2,1,0,0)$ не является вершиной P_4, поскольку она есть полусумма точек (разбиений) $(4,0,0,0)$ и $(0,2,0,0)$.

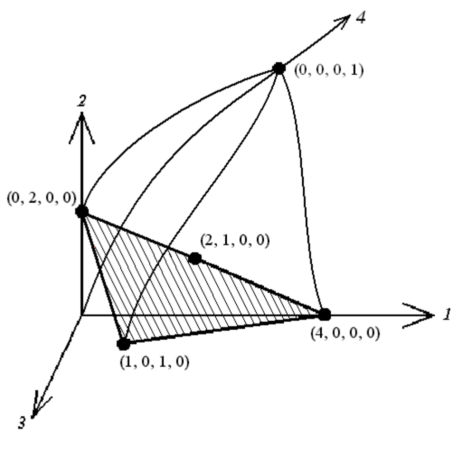

Рис. 1. Политоп P_4 разбиений числа 4

В дальнейшем $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество целых положительных чисел; $[1, m]$ обозначает дискретный отрезок чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$; мощность множества M обозначается $|M|$; целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и наименьшее целое число, не меньшее α, обозначаются, соответственно, $\lfloor \alpha \rfloor$ и $\lceil \alpha \rceil$; запись $x \vdash n$ означает, что $x \in \mathbb{Z}_+^n$ является разбиением n на слагаемые из $[1,n]$; множество $\{i \in [1,n] \mid x_i > 0\}$ всех различных частей разбиения $x \vdash n$ обозначается $S(x)$; символ 0^k обозначает последовательность из k нулей; символ $\uplus$ используется для обозначения объединения непересекающихся множеств; $\operatorname{vert} P$ обозначает множество вершин политопа P.

Любой политоп можно задать двумя способами: 1) указав его фасеты, то есть грани максимальной размерности, или 2) перечислив его вершины. При граневом описании фасеты политопа представляют собой неравенства, а сам политоп есть пересечение задаваемых этими неравенствами полупространств. Все фасеты политопа разбиений P_n описаны в терминах решений систем линейных уравнений и неравенств в [10].

В случае вершинного описания политоп задается как выпуклая оболочка своих вершин. Напомним, что точка $x \in \mathbb{R}^n$, принадлежащая некоторому политопу $P \subset \mathbb{R}^n$, является его вершиной тогда и только тогда, когда ее нельзя представить в виде выпуклой комбинации $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j y^j$, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j > 0$, некоторых других точек $y^j \in P, 1 \le j \le k$. Это относится и к политопу разбиений P_n. Поэтому вопрос, является ли заданное разбиение вершиной политопа P_n, сводится к тому, представимо ли оно в виде выпуклой комбинации других разбиений.

Приведем некоторые общие результаты о политопах разбиений [10]. Как видно из Рис. 1, политоп P_4 является пирамидой с вершиной в точке $(0,0,0,1)$. Это верно и для остальных политопов: каждый политоп P_n представляет собой пирамиду с вершиной в точке $(0^{n-1}, 1)$ и основанием, лежащим в гиперплоскости $x_n = 0$. Аффинная размерность политопа P_n (т.е., размерность минимального содержащего его аффинного подпространства) равна $n-1$. Заметим, что, несмотря на неполную размерность, мы рассматриваем политоп P_n в $\mathbb{R}^n$. Из того, что каждая целочисленная точка P_n, не являющаяся вершиной, принадлежит гиперплоскости $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$, следует, что она тоже разбиение числа n, а значит, все целочисленные точки P_n являются разбиениями n.

В [10] рассматривались также политопы ограниченных разбиений числа n, в которых все части принадлежат некоторому подмножеству из $[1,n]$. Показано, что все фасеты и вершины таких политопов определяются фасетами и вершинами политопа P_n.

2. Редукция вершин политопа разбиений. Вершины P_n можно получить из вершин политопов разбиений чисел меньших n. Введем преобразования

$\varphi_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n-i}, 0^i)$,

представляющие собой комбинации сдвига на 1 вдоль оси i и вложения пространства $\mathbb{R}^{n-i}$ в $\mathbb{R}^n$, $1 \le i < n$. Если отождествить точки $x \in \mathbb{R}^{n-i}$ с их образами $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ и, как следствие, политоп P_{n-i} с $\varphi_i(P_{n-i})$, то можно считать, что политопы разбиений образуют вложенную цепочку $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots$.

Следующая теорема утверждает, что политоп P_n наследует все свои вершины из предыдущих политопов.

Теорема 1 [5]. Пусть $x \neq (0^{n-1},1)$ вершина политопа P_n с компонентой $x_i > 0$, $1 \le i < n$. Тогда ее φ_i-прообраз является вершиной политопа P_{n-i}.

Некоторые вершины P_{n-i} после преобразования φ_i перестают быть вершинами P_n, поскольку они "захватываются" выпуклой оболочкой других вершин P_n. Такова, например, вершина (1, 1, 0) политопа P_3. Из Рис. 1 видно, что $\varphi_1(1,1,0) =$ (2, 1, 0, 0) есть полусумма разбиений (0, 2, 0, 0) и (4, 0, 0, 0) и, следовательно, не является вершиной P_4. В действительности эта судьба ожидает почти все вершины политопов разбиений.

Теорема 2 [10]. φ_1^n-образы всех вершин P_n, кроме вершины $(n,0^{n-1})$, не являются вершинами политопа P_{2n}, и P_{2n} – первый политоп, для которого это имеет место.

Введем отношение частичного порядка $\preceq$ на множестве разбиений всех чисел. Для $x \vdash n$ и $y \vdash m$, где $n,m \in \mathbb{Z}_+$, $n \ge m$, положим $y \preceq x$ в том случае, если $y_i \le x_i$, $i \in [1,m]$. Следующая теорема доказывается, используя теорему 1.

Теорема 3 [5]. Если x вершина P_n и $m < n$, то каждое разбиение $y \vdash m$, удовлетворяющее $y \preceq x$, является вершиной P_m.

На основании теоремы 1 можно построить все вершины политопа P_n, зная вершины политопов P_{n-i} для $i \in \left[1,\left[n/2\right]\right]$. Обозначим через $T_k[\ge i]$ множество разбиений числа k, все части которых не меньше i ($x_j = 0,\ j \in [1,i-1]$), и через $P_k[\ge i]$ политоп таких разбиений. Следующая теорема приводит к алгоритму перечисления вершин всех политопов разбиений P_n по мере роста *n*.

Теорема 4 [5]. Справедливы рекуррентные соотношения:

$$T_n = \left(\biguplus_{i=1}^{[n/2]} \varphi_i(T_{n-i}[\ge i]) \right) \cup (0^{n-1},1), \qquad \operatorname{vert} P_n \subseteq \left(\biguplus_{i=1}^{[n/2]} \varphi_i(\operatorname{vert} P_{n-i}[\ge i]) \right) \cup (0^{n-1},1).$$

3. Проблема распознавания вершин. Хорошо описываются вершины P_n с большими частями. Для них выполняется теорема, более сильная, чем теорема 1.

Теорема 5 [5]. Справедливы утверждения:

(a) разбиение $x \vdash n$ с компонентой $x_k > 0$, где $k > \left[n/2\right]$, является вершиной P_n тогда и только тогда, когда $\varphi_k^{-1}(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-k})$ вершина P_{n-k};

(b) для чётного *n*, единственная вершина P_n с компонентой $x_{n/2} > 0$ соответствует разбиению $n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2}$.

Доказательство (a) следует из теоремы 1 и того, что если $\varphi_k^{-1}(x)$ вершина P_{n-k}, а x выпуклая комбинация других разбиений *n*, то хотя бы у одного из последних разбиений *k*-я компонента больше 1, что невозможно. Утверждение (b) почти очевидно.

Теорема 5 сводит вопрос о том, является ли заданное разбиение $x \vdash n$ вершиной P_n, к случаю, когда все его части меньше $\lceil n/2 \rceil$.

В [10] были получены достаточные и, отдельно, необходимые условия для того, чтобы заданное разбиение было вершиной P_n. С их помощью удалось указать все вершины P_n для $n \le 8$. Достаточные условия выражаются следующим образом.

Теорема 6 [10]**.** Справедливы утверждения:

(i) Пусть для множества целых чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ $1 \le i_j \le n$, $j = 1, 2, \ldots, k$, уравнение $i_1x_1 + i_2x_2 + \ldots + i_kx_k = n$, $x_j \in \mathbb{Z}_+$ имеет точно одно или два решения. Тогда для каждого решения $a_1, a_2, \ldots, a_k$ точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с координатами $x_i = a_i$, для $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, и $x_i = 0$, для $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, является вершиной P_n.

(ii) Пусть $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ возрастающая последовательность целых положительных чисел. Определим $n_k = n$, $x_{i_k} = \left[\dfrac{n_k}{i_k}\right]$; $n_{k-1} = n_k - x_{i_k} i_k$, $x_{i_{k-1}} = \left[\dfrac{n_{k-1}}{i_{k-1}}\right]$; … ; $n_1 = n_2 - x_{i_2} i_2$, $x_1 = x_{i_1} = \left[\dfrac{n_1}{i_1}\right] = n_1$; и $x_i = 0$ для $i \ne i_1, i_2, \ldots, i_k$. Тогда $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является вершиной P_n.

Следующая теорема дает необходимое условие для вершин P_n, которое обобщает необходимые условия из [10].

Теорема 7 [5]**.** Разбиение x числа *n* есть выпуклая комбинация двух разбиений этого же числа тогда и только тогда, когда существуют два непересекающихся подмножества S_1 и S_2 множества его различных частей $S(x)$ и существуют два набора чисел $u = \langle u_j \in \mathbb{Z}_+; j \in S_1 \rangle$, $v = \langle v_k \in \mathbb{Z}_+; k \in S_2 \rangle$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{j \in S_1} u_j j = \sum_{k \in S_2} v_k k, \ 0 < u_j < x_j, \ 0 < v_k < x_k. \tag{1}$$

Утверждение теоремы 7 имеет простую комбинаторную интерпретацию. Если $x \vdash n$, то можно считать, что для каждого $i \in S(x)$ имеется x_i гирь веса *i*. Тогда (1) означает, что с помощью этих гирь некоторый вес можно взвесить двумя способами.

Анализ разбиений показывает, что критерия теоремы 7 и условий теоремы 6 достаточно для распознавания всех вершин P_n для $n < 21$. Однако при $n = 21$ появляются два разбиения, не являющиеся вершинами P_{21}, поскольку они являются выпуклыми комбинациями трех разбиений: $21 = 1 + 4 + 7 + 9 = 1/3 \cdot [(3 \cdot 1 + 2 \cdot 9) + (3 \cdot 4 + 9) + (3 \cdot 7)]$ и $21 = 3 + 5 + 6 + 7 = 1/3 \cdot [(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) + (3 \cdot 5 + 6) + (3 \cdot 7)]$. Оказывается, эти два разбиения являются представителями серий разбиений не вершин и для других $n > 21$ кратных 3.

Теорема 8 [5]. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ разбиения $1+(4+k)+(7+2k)+(9+3k)$ и $3+(5+k)+(6+k)+(7+k)$ чисел $n=21+6k$ и $n=21+3k$, соответственно, являются выпуклыми комбинациями с коэффициентами 1/3 трех разбиений $3\cdot(7+2k)$, $3\cdot(4+k)+1\cdot(9+3k)$, $3\cdot 1+2\cdot(9+3k)$ и $3\cdot(7+k)$, $1\cdot 3+3\cdot(6+k)$ *и* $2\cdot 3+3\cdot(5+k)$ числа *n*, соответственно, причем двух разбиений для этого недостаточно.

Из теоремы 7 и принципа Дирихле вытекают новые необходимые условия для вершин политопа P_n.

Теорема 9 [5]. Для любой вершины x политопа P_n выполняются условия:

(a) $\prod_{i\in S(x)} (x_i+1) \le n+1$;

(b) число различных частей разбиения *x* не превосходит $\log(n+1)$.

Эти условия проверяются легче, чем критерий теоремы 7. Так, из условия (а) получаем, что разбиение $(1,0,2,0,3,0^{17})$ числа 22 не является вершиной P_{22}, поскольку $2\cdot 3\cdot 4 = 24 > 23$. Для разбиения $(1,1,0,1,0,0,1,1,0^{14})$ нарушаются оба условия.

Теорема 7 связывает вершины политопа разбиений с известными в аддитивной теории чисел множествами Сидона. Относительно множеств Сидона пока нет единой терминологии [9], но обычно так называют множества $A \subset \mathbb{Z}_+$, для которых из равенства $a_1+a_2=a_3+a_4$, $a_1,a_2,a_3,a_4 \in A$, следует, что $\{a_1,a_2\}=\{a_3,a_4\}$, хотя в исходном определении Сидона [12] требовалось, чтобы число пар, удовлетворяющих приведенному равенству, не превосходило 2. Иногда множества Сидона называют B_2 множествами. Рассматривают также множества Сидона порядка $h>2$ (или B_h множества), в их определении вместо пар элементов фигурируют всевозможные наборы по *h* элементов из *A* и слагаемые разрешается повторять [8].

Каждое разбиение-вершина P_n естественным образом определяет мультимножество, которое естественно назвать мультимножеством Сидона смешанного порядка. Оно состоит из частей разбиения с учетом их кратности, и из него невозможно выбрать два набора из необязательно равного числа элементов, но с равными суммами, а элементы наборов разрешается повторять в совокупности в пределах их кратности в мультимножестве.

4. Рекурсивные операции порождения вершин и опорные вершины [11]**.** Введем две операции укрупнения частей разбиения и покажем, что их можно использовать для построения новых вершин политопа P_n из вершин уже известных.

Операция 1. Пусть $x \vdash n$ и пусть $u,v \in S(x)$, $u \ne v$, – две различные части разбиения *x*. Для определенности можно считать, что $x_u \le x_v$. Построим точку $y = C_{u,v}(x) \in \mathbb{Z}_+^n$ с координатами $y_u=0$, $y_v=x_v-x_u$, $y_{u+v}=x_{u+v}+x_u$ и $y_j=x_j$ для $j\in[1,n]$, $j \ne u, v, u+v$.

Операция 2. Пусть x разбиение числа n, в которое некоторая часть $u \in S(x)$ входит более одного раза, то есть $x_u > 1$. Построим точку $y = C_u(x) \in \mathbb{Z}_+^n$ с координатами $y_u = 0$, $y_{x_u u} = x_{x_u u} + 1$ и $y_j = x_j$ для $j \in [1,n]$, $j \neq u, x_u u$.

Теорема 10. Пусть вершина x политопа P_n содержит две различные части u и v. Тогда $y = C_{u,v}(x)$ также является вершиной политопа P_n.

Принадлежность $y \in \operatorname{vert} P_n$ доказывается методом "от противного". Предположив, что $y \notin \operatorname{vert} P_n$, получим, что y является выпуклой комбинацией некоторых разбиений $y^t \vdash n$, $1 \le t \le k$. Но тогда из этих разбиений можно построить разбиения $x^t \vdash n$, $1 \le t \le k$, для которых x является выпуклой комбинацией.

Теорема 11. Пусть вершина x политопа P_n содержит часть u более одного раза. Тогда $y = C_u(x)$ также является вершиной политопа P_n.

Проиллюстрируем применение операций укрупнения частей разбиений на примере политопа P_6. Согласно [10], из 11 разбиений числа 6 вершинами P_6 являются следующие 7 разбиений: $x^1 = (6,0,0,0,0,0)$, $x^2 = (2,0,0,1,0,0)$, $x^3 = (1,0,0,0,1,0)$, $x^4 = (0,3,0,0,0,0)$, $x^5 = (0,1,0,1,0,0)$, $x^6 = (0,0,2,0,0,0)$, $x^7 = (0,0,0,0,0,1)$. Применив Операцию 1 к x^2, получим x^3, а из x^3 и x^5 — вершину x^7. С помощью Операции 2 из вершины x^2 получим x^5, а из x^4 и x^6 снова получим вершину x^7. С другой стороны, легко проверить, что ни одну из вершин x^1, x^2, x^4, x^6 невозможно получить из какой-либо другой вершины с помощью этих операций. Таким образом, все вершины P_6 можно получить из 4 вершин x^1, x^2, x^4, x^6, и этот набор минимален по включению. Естественно ввести следующее определение.

Определение. Назовем вершину политопа P_n опорной, если ее нельзя получить в результате применения одной из операций укрупнения частей к какой-либо другой вершине этого политопа.

Таким образом, вершины x^1, x^2, x^4, x^6 являются опорными для $n = 6$. Приведем некоторые данные о числе опорных вершин политопов. Для $n = 10$ число всех разбиений равно 42, число вершин P_{10} равно 19, а опорных вершин всего 9. Для $n = 20$ эти числа равны, соответственно, 627, 99 и 29. Таким образом, если для $n = 6$ доля опорных вершин составляет 36% от числа всех разбиений, то для $n = 10$ она снижается до 21%, а в последнем случае падает до менее чем 5%. Отношение числа опорных вершин к числу всех вершин, как легко заметить, тоже быстро уменьшается с ростом n.

5. Заключение. Для описания большинства известных политопов через его вершины необходимо знать полный набор вершин. Результаты работы показывают, что в случае политопа разбиений имеет место необычная ситуация. Можно избежать перечисления всех вершин P_n, ограничившись только теми, которые являются опорными. Остальные вершины можно построить из них с помощью последовательного применения операций укрупнения частей. Все разбиения числа n можно получить затем из вершин P_n, вычислив все целочисленные точки $\mathbb{R}^n$, являющиеся выпуклыми комбинациями вершин. Вопросы о том, как построить множество опорных вершин для заданного n и какова его мощность, остаются пока открытыми. Так же, как и аналогичные вопросы для множества всех вершин P_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005. 767 с.
2. *Фултон У.* Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М.: МЦНМО, 2006. 328 с.
3. *Харди Г.* Двенадцать лекций о Рамануджане. М.: Институт компьют. исслед., 2002. 336 с.
4. *Шлык В.А.* Политопы разбиений чисел // Весці АН Беларусі, Сер. фiз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 89–92.
5. *Шлык В.А.* О вершинах политопов разбиений чисел // Доклады НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 2.
6. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
7. *Comtet A., Majumdar S.N. and Ouvry S.* Integer partitions and exclusion statistics. J. Phys. A: Math. Theor., 2007, Vol. 40, N. 37, P. 11255–11269; arXiv:0705.2640v1, [cond-mat.stat-mech] 2007, P. 1–16.
8. *Dias da Silva J.A. and Nathanson M.B.* Maximal Sidon Sets and Matroids // arXiv:math.NT/0504226. 2005. Vol. 1.
9. *O'Bryant K.* A Complete Annotated Bibliography of Work Related to Sidon Sequences. Electronic J. Combinatorics, DS 2004, P. 1–39; arXiv:math.NT/0407117, 2004, 1, P. 1–38.
10. *Shlyk V.A.* Polytopes of Partitions of Numbers // Europ. J. Combinatorics. 2005. Vol. 26. N 8. P. 1139–1153. doi:10.1016/j.ejc.2004.08.004.
11. *Shlyk V.A.* Recursive operations for generating vertices of integer partition polytopes // Preprint JINR. 2008. P. 1-9.
12. *Sidon S.* Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen // Math. Annalen. 1932. Vol. 106. P. 536–539.

SOME RESULTS ON VERTICES OF INTEGER PARTITION POLYTOPES

Shlyk V. A.

In this paper, we present some results on the vertices of integer partition polytopes with attention focused at the problem of recognizing them. A criterion of representability of a given partition as a convex combination of two others, as well as sufficient and, separately, necessary conditions for a partition to be a vertex are presented. We introduce two combinatorial operations on partitions and show that all vertices of any integer partition polytope can be recursively generated with help of these operations from a considerably smaller subset of its support vertices